

Všechny úlohy uvažujte nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Popište Σ^*/\sim_L (tj. rozklad množiny všech slov podle prefixové ekvivalence jazyka L), kde:
- a) $L = \emptyset$;
 - b) $L = \{a^{12}\}$;
 - c) $L = \{a^3, a^7, a^4b^4, b^4a^4\}$;
 - d) $L = \{w \in \Sigma^* : \#_a(w) = \#_b(w)\}$;
 - e) $L = \{w \in \Sigma^* : |w| \geq 42\}$;
 - f) $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
 - g) $L = \{w \in \Sigma^* : w = w^R\}$.

2. Pro každé $n \leq 6$ určete počet pravých kongruencí, které respektují jazyk $\{w \in \Sigma^* : |w| \bmod 4 = 0\}$ a jejichž index je n .

3. Uvažme pravé kongruence \sim_1, \dots, \sim_5 definované následujícími předpisy ($x, y \in \Sigma^*$):

$$\begin{aligned}x \sim_1 y &\Leftrightarrow x \text{ a } y \text{ končí na stejné písmeno}^1 \\x \sim_2 y &\Leftrightarrow x \text{ a } y \text{ začínají na stejné písmeno}^1 \\x \sim_3 y &\Leftrightarrow |x| \bmod 6 = |y| \bmod 6 \\x \sim_4 y &\Leftrightarrow (x \sim_1 y \wedge x \sim_3 y) \\x \sim_5 y &\Leftrightarrow (x \sim_2 y \wedge x \sim_3 y)\end{aligned}$$

Pro každé $i \in \{1, \dots, 5\}$ určete:

- a) kolik existuje jazyků, které \sim_i respektuje;
- b) kolik existuje jazyků, jejichž prefixovou ekvivalencí je \sim_i .

4. V závislosti na $n \in \mathbb{N}$ určete:

- a) kolik existuje konečných neprázdných jazyků, jejichž nejdelší slova mají délku n ;
- b) jaký nejmenší a největší index mají prefixové ekvivalence jazyků z a).

¹ ε je v relaci jen se sebou