Nerozhodnutelné problémy a redukce

Martin Jonáš

IB005 – Formální jazyky a automaty I

Rekurzivní a rekurzivně spočetné jazyky

Rekurzivní jazyk

Rekurzivní a rekurzivně spočetné jazyky

Rekurzivní jazyk

- existuje TS, který akceptuje každé slovo z jazyka L a každé slovo, které není v L, zamítá
- odpovídají rozhodnutelným problémům

Rekurzivní a rekurzivně spočetné jazyky

Rekurzivní jazyk

- existuje TS, který akceptuje každé slovo z jazyka L a každé slovo, které není v L, zamítá
- odpovídají rozhodnutelným problémům

Rekurzivně spočetný jazyk (RE)

Rekurzivní a rekurzivně spočetné jazyky

Rekurzivní jazyk

- existuje TS, který akceptuje každé slovo z jazyka L a každé slovo, které není v L, zamítá
- odpovídají rozhodnutelným problémům

Rekurzivně spočetný jazyk (RE)

- existuje TS, který akceptuje každé slovo z jazyka L a každé slovo, které není v L, zamítá nebo nad ním cyklí
- odpovídají částečně rozhodnutelným problémům

Nerozhodnutelné problémy

Existují problémy, které nejsou rozhodnutelné. Například rozhodnout, jestli

- výpočet zadaného TS na zadaném slově skončí,

Nerozhodnutelné problémy

Existují problémy, které nejsou rozhodnutelné. Například rozhodnout, jestli

- výpočet zadaného TS na zadaném slově skončí,
- zadaný TS akceptuje zadané slovo,

Nerozhodnutelné problémy

Existují problémy, které nejsou rozhodnutelné. Například rozhodnout, jestli

- výpočet zadaného TS na zadaném slově skončí,
- zadaný TS akceptuje zadané slovo,
- zadaný TS akceptuje alespoň jedno slovo.

Nerozhodnutelné problémy

Existují problémy, které nejsou rozhodnutelné. Například rozhodnout, jestli

- výpočet zadaného TS na zadaném slově skončí,
- zadaný TS akceptuje zadané slovo,
- zadaný TS akceptuje alespoň jedno slovo.

Nerozhodnutelné problémy

Existují problémy, které nejsou rozhodnutelné. Například rozhodnout, jestli

- výpočet zadaného TS na zadaném slově skončí,
- zadaný TS akceptuje zadané slovo,
- zadaný TS akceptuje alespoň jedno slovo.

Odpovídající nerekurzivní jazyky jsou

- $\mathrm{HALT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ výpočet TS M na slově w je konečný$\}$,

Nerozhodnutelné problémy

Existují problémy, které nejsou rozhodnutelné. Například rozhodnout, jestli

- výpočet zadaného TS na zadaném slově skončí,
- zadaný TS akceptuje zadané slovo,
- zadaný TS akceptuje alespoň jedno slovo.

Odpovídající nerekurzivní jazyky jsou

- $\mathrm{HALT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ výpočet TS M na slově w je konečný$\}$,
- $\mathrm{ACC} = \{\langle M, w\rangle \mid$ TS M akceptuje slovo $w\}$,

Nerozhodnutelné problémy

Existují problémy, které nejsou rozhodnutelné. Například rozhodnout, jestli

- výpočet zadaného TS na zadaném slově skončí,
- zadaný TS akceptuje zadané slovo,
- zadaný TS akceptuje alespoň jedno slovo.

Odpovídající nerekurzivní jazyky jsou

- $\mathrm{HALT} = \{\langle M, w\rangle \mid \text{výpočet TS } M \text{ na slově } w \text{ je konečný}\}$,
- $\mathrm{ACC} = \{\langle M, w\rangle \mid \text{TS } M \text{ akceptuje slovo } w\}$,
- $\mathrm{NONEMPTY} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ je TS takový, že } \mathrm{L}(M) \neq \emptyset\}$.

Nerozhodnutelné problémy

Existují problémy, které nejsou rozhodnutelné. Například rozhodnout, jestli

- výpočet zadaného TS na zadaném slově skončí,
- zadaný TS akceptuje zadané slovo,
- zadaný TS akceptuje alespoň jedno slovo.

Odpovídající nerekurzivní jazyky jsou

- $\mathrm{HALT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ výpočet TS M na slově w je konečný$\}$,
- $\mathrm{ACC} = \{\langle M, w\rangle \mid$ TS M akceptuje slovo $w\}$,
- $\mathrm{NONEMPTY} = \{\langle M\rangle \mid M$ je TS takový, že $\mathrm{L}(M) \neq \emptyset\}$.

Nerozhodnutelné problémy

Existují problémy, které nejsou rozhodnutelné. Například rozhodnout, jestli

- výpočet zadaného TS na zadaném slově skončí,
- zadaný TS akceptuje zadané slovo,
- zadaný TS akceptuje alespoň jedno slovo.

Odpovídající nerekurzivní jazyky jsou

- $\mathrm{HALT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ výpočet TS M na slově w je konečný$\}$,
- $\mathrm{ACC} = \{\langle M, w\rangle \mid$ TS M akceptuje slovo $w\}$,
- $\mathrm{NONEMPTY} = \{\langle M\rangle \mid M$ je TS takový, že $\mathrm{L}(M) \neq \emptyset\}$.

Všechny uvedené jazyky jsou rekurzivně spočetné.

Redukce

Definice (m-redukce)

Nechť $A \subseteq \Sigma^*$ *a* $B \subseteq \Phi^*$*. Říkáme, že jazyk* A *se m-redukuje na jazyk* B *(značíme* $A \leqslant_m B$*), pokud existuje taková totálně vyčíslitelná funkce* $f\colon \Sigma^* \to \Phi^*$*, že platí*

$$w \in A \iff f(w) \in B$$

pro každé $w \in \Sigma^*$*.*

Redukce

Definice (m-redukce)

Nechť $A \subseteq \Sigma^*$ *a* $B \subseteq \Phi^*$. *Říkáme, že jazyk* A *se m-redukuje na jazyk* B *(značíme* $A \leqslant_m B$*), pokud existuje taková* *totálně vyčíslitelná* *funkce* $f\colon \Sigma^* \to \Phi^*$, *že platí*

$$w \in A \implies f(w) \in B$$
$$w \in A \impliedby f(w) \in B$$

pro každé $w \in \Sigma^*$.

Redukce

Definice (m-redukce)

Nechť $A \subseteq \Sigma^*$ *a* $B \subseteq \Phi^*$. *Říkáme, že jazyk* A *se m-redukuje na jazyk* B *(značíme* $A \leqslant_m B$*), pokud existuje taková totálně vyčíslitelná funkce* $f\colon \Sigma^* \to \Phi^*$, *že platí*

$$\begin{aligned} w \in A &\implies f(w) \in B \\ w \notin A &\implies f(w) \notin B \end{aligned}$$

pro každé $w \in \Sigma^*$.

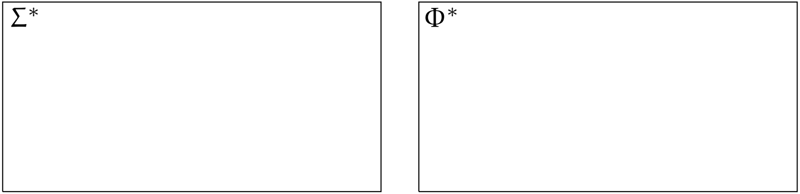
Redukce

Definice (m-redukce)

Nechť $A \subseteq \Sigma^*$ *a* $B \subseteq \Phi^*$. *Říkáme, že jazyk* A *se m-redukuje na jazyk* B *(značíme* $A \leqslant_m B$*), pokud existuje taková totálně vyčíslitelná funkce* $f \colon \Sigma^* \to \Phi^*$*, že platí*

$$w \in A \implies f(w) \in B$$
$$w \notin A \implies f(w) \notin B$$

pro každé $w \in \Sigma^*$.



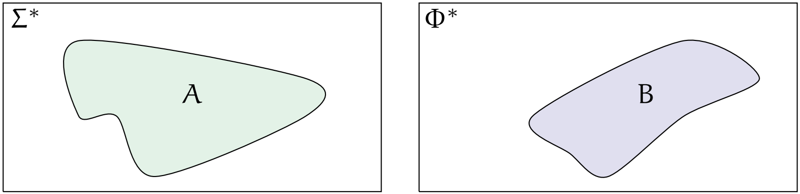
Redukce

Definice (m-redukce)

Nechť $A \subseteq \Sigma^*$ *a* $B \subseteq \Phi^*$. *Říkáme, že jazyk* A *se m-redukuje na jazyk* B *(značíme* $A \leqslant_m B$*), pokud existuje taková totálně vyčíslitelná funkce* $f \colon \Sigma^* \to \Phi^*$*, že platí*

$$w \in A \implies f(w) \in B$$
$$w \notin A \implies f(w) \notin B$$

pro každé $w \in \Sigma^*$.



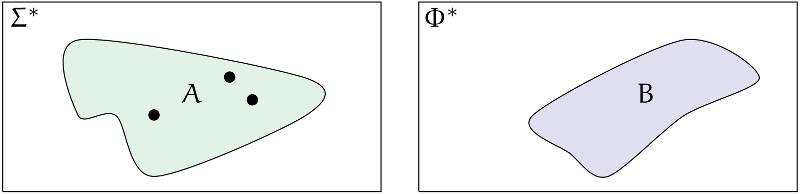
Redukce

Definice (m-redukce)

Nechť $A \subseteq \Sigma^*$ *a* $B \subseteq \Phi^*$. *Říkáme, že jazyk* A *se m-redukuje na jazyk* B *(značíme* $A \leqslant_m B$*), pokud existuje taková totálně vyčíslitelná funkce* $f\colon \Sigma^* \to \Phi^*$, *že platí*

$$w \in A \implies f(w) \in B$$
$$w \notin A \implies f(w) \notin B$$

pro každé $w \in \Sigma^*$.



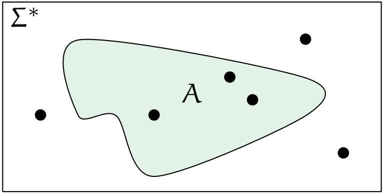
Redukce

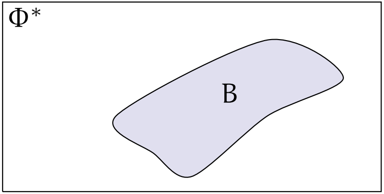
Definice (m-redukce)

Nechť $A \subseteq \Sigma^*$ *a* $B \subseteq \Phi^*$. *Říkáme, že jazyk* A *se m-redukuje na jazyk* B *(značíme* $A \leqslant_m B$*), pokud existuje taková totálně vyčíslitelná funkce* $f\colon \Sigma^* \to \Phi^*$, *že platí*

$$w \in A \implies f(w) \in B$$
$$w \notin A \implies f(w) \notin B$$

pro každé $w \in \Sigma^*$.





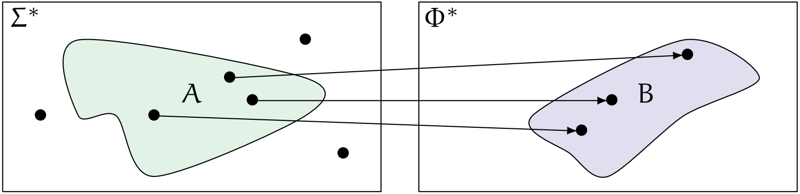
Redukce

Definice (m-redukce)

Nechť $A \subseteq \Sigma^*$ *a* $B \subseteq \Phi^*$. *Říkáme, že jazyk* A *se m-redukuje na jazyk* B *(značíme* $A \leqslant_m B$*), pokud existuje taková totálně vyčíslitelná funkce* $f\colon \Sigma^* \to \Phi^*$, *že platí*

$$
\begin{aligned}
w \in A &\implies f(w) \in B \\
w \notin A &\implies f(w) \notin B
\end{aligned}
$$

pro každé $w \in \Sigma^*$.



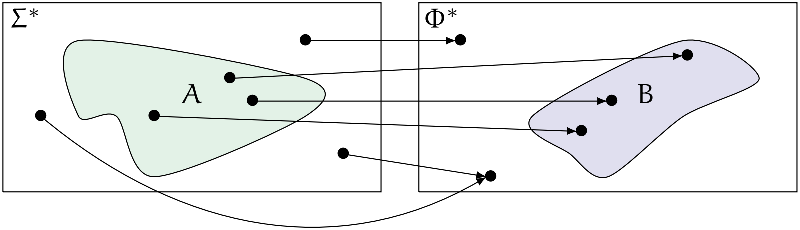
Redukce

Definice (m-redukce)

Nechť $A \subseteq \Sigma^*$ *a* $B \subseteq \Phi^*$*. Říkáme, že jazyk* A *se m-redukuje na jazyk* B *(značíme* $A \leqslant_m B$*), pokud existuje taková totálně vyčíslitelná funkce* $f\colon \Sigma^* \to \Phi^*$*, že platí*

$$\begin{aligned} w \in A &\implies f(w) \in B \\ w \notin A &\implies f(w) \notin B \end{aligned}$$

pro každé $w \in \Sigma^*$*.*



Redukce – příklad

Příklad

Uvažte jazyky

$$A = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ je dělitelná } 2\},$$
$$B = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ je dělitelná } 4\}.$$

Ukažte, že platí $A \leqslant_m B$.

Věta

Pokud $A \leqslant_m B$ *a* B *je rekurzivní jazyk, pak také* A *je rekurzivní.*

Redukce, rozhodnutelnost a nerozhodnutelnost

Věta

Pokud $A \leqslant_m B$ *a* B *je rekurzivní jazyk, pak také* A *je rekurzivní.*

Věta

Pokud $A \leqslant_m B$ *a* B *je RE, pak také* A *je RE.*

Redukce, rozhodnutelnost a nerozhodnutelnost

Věta

Pokud $A \leqslant_m B$ *a* B *je rekurzivní jazyk, pak také* A *je rekurzivní.*

Věta

Pokud $A \leqslant_m B$ *a* B *je RE, pak také* A *je RE.*

Důsledek

Pokud $A \leqslant_m B$ *a* A *není rekurzivní jazyk, pak* B *není rekurzivní.*

Redukce, rozhodnutelnost a nerozhodnutelnost

Věta

Pokud $A \leqslant_m B$ *a* B *je rekurzivní jazyk, pak také* A *je rekurzivní.*

Věta

Pokud $A \leqslant_m B$ *a* B *je RE, pak také* A *je RE.*

Důsledek

Pokud $A \leqslant_m B$ *a* A *není rekurzivní jazyk, pak* B *není rekurzivní.*

Důsledek

Pokud $A \leqslant_m B$ *a* A *není RE, pak* B *není RE.*

Redukce a nerozhodnutelnost – příklad

Příklad

Dokažte, že problém rozhodnout, jestli dva zadané TS akceptují různé jazyky, není rozhodnutelný. Jinými slovy dokažte, že jazyk

$$\mathrm{NOTEQ} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1, M_2 \text{ jsou TS a } \mathrm{L}(M_1) \neq \mathrm{L}(M_2)\}$$

není rekurzivní.

Příklad

Dokažte, že problém rozhodnout, jestli výpočet zadaného TS na prázdném slově je konečný, není rozhodnutelný. Jinými slovy dokažte, že jazyk

$$L = \{\langle M \rangle \mid \text{výpočet TS } M \text{ na slově } \varepsilon \text{ je konečný } \}$$

není rekurzivní.

Redukce a nerozhodnutelnost – příklad

Příklad

Dokažte, že problém rozhodnout, jestli výpočet zadaného TS na prázdném slově je konečný, není rozhodnutelný. Jinými slovy dokažte, že jazyk

$$L = \{\langle M \rangle \mid \text{výpočet TS } M \text{ na slově } \varepsilon \text{ je konečný } \}$$

není rekurzivní.

Je L rekurzivně spočetný?

Redukce a nerozhodnutelnost – příklad

Příklad

Dokažte, že problém rozhodnout, jestli výpočet zadaného TS na prázdném slově je konečný, není rozhodnutelný. Jinými slovy dokažte, že jazyk

$$L = \{\langle M \rangle \mid \text{výpočet TS } M \text{ na slově } \varepsilon \text{ je konečný } \}$$

není rekurzivní.

Je L rekurzivně spočetný? Je $\mathrm{co}-L$ rekurzivně spočetný?

Redukce a nerozhodnutelnost – příklad

Příklad

Dokažte, že problém rozhodnout, jestli výpočet zadaného TS na prázdném slově je konečný, není rozhodnutelný. Jinými slovy dokažte, že jazyk

$$L = \{\langle M \rangle \mid \text{výpočet TS } M \text{ na slově } \varepsilon \text{ je konečný } \}$$

není rekurzivní.

Je L rekurzivně spočetný? Je $\mathrm{co}{-}L$ rekurzivně spočetný?

Věta (Post)

Jazyk L *je rekurzivní právě tehdy, když jazyky* L *a* $\mathrm{co}{-}L$ *jsou rekurzivně spočetné.*

Redukce a nerozhodnutelnost – příklad

Příklad

Dokažte, že problém rozhodnout, jestli zadaný TS akceptuje regulární jazyk, není rozhodnutelný. Jinými slovy dokažte, že jazyk

$$\mathrm{REG} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je TS a } \mathrm{L}(M) \text{ je regulární}\}$$

není rekurzivní.