Algebra II – jaro 2016 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N}, \diamond)$, kde $\diamond$ je binární operace definovaná předpisem
$$a \diamond b = \begin{cases} a+1, & \text{pokud } 2 \nmid a+b, \\ a+2, & \text{pokud } 2 \mid a+b. \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$, kde L je množina všech binárních relací ρ na množině $\mathbb{N}$, které splňují podmínku, že pro všechna $a, b, c \in \mathbb{N}$, pokud (a, b) i (a, c) patří do ρ, potom do ρ patří také alespoň jedna z dvojic (b, c) a (c, b), je svaz.

3. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$, kde prvky L jsou právě množina $\{0, 1\}^*$ a všechny podmnožiny B množiny $\{0, 1\}^*$ takové, že pro každé slovo $w \in B$ patří do B právě jedno ze slov $w0$ a $w1$, je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \leq)$, kde prvky L jsou právě posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, kde $a_i \in \{0, 1, 2\}$, a uspořádání je dáno předpisem
$$(a_i)_{i=1}^{\infty} \leq (b_i)_{i=1}^{\infty} \iff \forall i \in \mathbb{N}\colon a_i \leq b_i,$$
je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda předpis $(\varphi, \psi) \sim (\rho, \sigma) \iff \varphi \circ \psi = \rho \circ \sigma$ definuje kongruenci $\sim$ algebry $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, *, \diamond)$, kde $*$ je unární operace definovaná předpisem $*((\varphi, \psi)) = (\varphi \circ \psi, \varphi \circ \psi)$ a $\diamond$ je binární operace definovaná předpisem
$$(\varphi, \psi) \diamond (\rho, \sigma) = (\varphi \circ \rho, \psi \circ \sigma),$$
pro $\varphi, \psi, \rho, \sigma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z binárních operačních symbolů f, g a h a unárního operačního symbolu p. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$ s nosnou množinou $\{\, \rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \subseteq \rho \,\}$, s operacemi $f^{\mathcal{A}}$, $g^{\mathcal{A}}$ a $h^{\mathcal{A}}$ definovanými pro libovolné reflexivní relace $\rho, \sigma \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ předpisy $f^{\mathcal{A}}(\rho, \sigma) = \rho \cap \sigma$, $g^{\mathcal{A}}(\rho, \sigma) = \rho \cup \sigma$, $h^{\mathcal{A}}(\rho, \sigma) = \rho \circ \sigma$ a s $p^{\mathcal{A}}(\rho)$ definovaným jako tranzitivní obal relace ρ.
a) $p(f(x, y)) = f(p(x), p(y))$,
b) $p(g(x, y)) = p(h(x, y))$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů, které jsou buď Booleovy algebry, nebo prázdné.