Příklad 1. *Určete vytvořující funkci a explicitní vyjádření pro n-tý člen posloupnosti* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *definované vztahy*

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}.$$

Řešení. Pro $n = 0$ dostáváme $a_0 = 5a_{-1} - 4a_{-2} = 5 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$, ale zároveň má platit dle zadání $a_0 = 1$. Proto

$$1 = a_0 = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} + 1.$$

Podobně pro $n = 1$ máme $a_1 = 5a_0 - 4a_{-1} = 5 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 5$, ale zároveň má platit dle zadání $a_1 = 2$. Proto

$$2 = a_1 = 5a_0 - 4a_{-1} - 3.$$

Chceme popsat součet $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Příslušné řádky tedy pronásobíme vhodnou mocninou x.

$$\begin{aligned}
a_0x^0 &= 5a_{-1}x^0 - 4a_{-2}x^0 + 1 \cdot x^0 \\
a_1x^1 &= 5a_0x^1 - 4a_{-1}x^1 - 3 \cdot x^1 \\
&\dots \\
a_nx^n &= 5a_{n-1}x^n - 4a_{n-2}x^n \\
&\dots
\end{aligned}$$

Sečteme nyní tyto rovnice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_{n-2}x^n + (1 - 3x). \tag{1}$$

Potřebujeme docílit toho, aby index u členu posloupnosti souhlasil s exponentem u x. Všimněme si, že platí:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 5a_{n-1}x^n &= \sum_{n=-1}^{\infty} 5a_nx^{n+1} = 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \\
\sum_{n=0}^{\infty} 4a_{n-2}x^n &= \sum_{n=-2}^{\infty} 4a_nx^{n+2} = 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.
\end{aligned}$$

Upravme tedy rovnici (1) dosazením těchto výsledků:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n + (1 - 3x), \text{ pak}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n(1 - 5x + 4x^2) = 1 - 3x,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \frac{1 - 3x}{1 - 5x + 4x^2}.$$

Nyní je potřeba rozvinout **vytvořující funkci posloupnosti** $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{1 - 5x + 4x^2}$ do mocninné řady. Rozklad na parciální zlomky vychází následovně:

$$f(x) = \frac{1 - 3x}{1 - 5x + 4x^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - x} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - 4x},$$

pak dostáváme

$$f(x) = \frac{2}{3} \sum x^n + \frac{1}{3} \sum (4x)^n = \sum \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}4^n\right) x^n,$$

a tedy $a_n = \dfrac{2 + 4^n}{3}$. □

Příklad 2. *Určete vytvořující funkci a explicitní vyjádření pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definované vztahy*

$$a_0 = \frac{5}{2}, a_1 = -\frac{5}{4}, a_n = a_{n-2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Řešení. Pro $n = 0 : a_0 = \frac{5}{2} = a_{-2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \quad + 1.$

Pro $n = 1 : a_1 = -\frac{5}{4} = a_{-1} + 3 \cdot \frac{1}{4} \quad - 2.$

Po pronásobení:

$$\begin{aligned}
a_0 x^0 &= a_{-2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)x^0 + x^0,\\
a_1 x^1 &= a_{-1} + 3\left(\frac{1}{4}\right)x^1 - 5x^1,\\
&\dots\\
a_n x^n &= a_{n-2}x^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^n,\\
&\dots
\end{aligned}$$

Nyní upravujeme součty:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=-2}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^n - 2x + 1,\\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n - 2x + 1,\\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (1 - x^2) &= \frac{3}{2}\frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - 2x + 1,\\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (1 - x^2) &= \frac{3}{2 - x} - 2x + 1 = \frac{3 + (2 - x)(-2x + 1)}{2 - x} = \frac{2x^2 - 5x + 5}{2 - x},\\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{2x^2 - 5x + 5}{(2 - x)(1 - x^2)} = f(x).
\end{aligned}$$

Rozklad na parciální zlomky: $\dfrac{2x^2 - 5x + 5}{(2 - x)(1 - x^2)} = \dfrac{2}{1 - (-x)} + \dfrac{1}{1 - x} + \dfrac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{x}{2}}$, proto můžeme psát

$$f(x) = \sum 2(-x)^n + \sum x^n + \sum \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n,$$

$$f(x) = \sum \left(2(-1)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) x^n,$$

závěrem $a_n = 1 + 2(-1)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

□