Diskrétní matematika – cvičení 11. týden

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2020

Poznámka

Připomeňme si z minule: posloupnost

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

je vpodstatě to samé co mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

která má někdy součet, jímž je funkce $f(x)$, které říkáme *generující funkce* posloupnosti. V dalším se nám bude hodit dodefinovat $a_n = 0$ pro $n < 0$, takže lze v mocninné řadě sčítat přes všechna celá čísla a nemusíme tak meze příliš řešit.

Poznámka

Funkce $x \cdot f(x)$ je zřejmě

$$\begin{aligned} x \cdot \sum a_n x^n &= \sum a_n x^{n+1} = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots \\ &= \sum a_{n-1} x^n = 0 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots \end{aligned}$$

a je tedy generující funkcí posloupnosti $(0, a_0, a_1, \ldots)$, jejíž n-tý člen je a_{n-1} (tady se hodí, že pro $n = 0$ jsme dodefinovali $a_{-1} = 0$). Můžeme ji značit (a_{n-1}).

Poznámka

Funkce $x \cdot f(x)$ je zřejmě

$$\begin{aligned} x \cdot \sum a_n x^n = \sum a_n x^{n+1} &= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots \\ = \sum a_{n-1} x^n &= 0 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots \end{aligned}$$

a je tedy generující funkcí posloupnosti $(0, a_0, a_1, \ldots)$, jejíž n-tý člen je a_{n-1} (tady se hodí, že pro $n = 0$ jsme dodefinovali $a_{-1} = 0$). Můžeme ji značit (a_{n-1}).
Podobně $x^2 \cdot f(x)$ je generující funkcí posloupnosti (a_{n-2}).

Příklad

Najděte vytvořující funkci a explicitní vyjádření pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$ defiované rekurentním vztahem

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$
$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 \text{ pro } n \geq 2$$

Příklad

Najděte vytvořující funkci a explicitní vyjádření pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$ defiované rekurentním vztahem

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$
$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 \text{ pro } n \geq 2$$

Řešení

Doplňme $a_{-1} = a_{-2} = 0$ a rozepišme podrobně druhou rovnici pro případ $n = 1$, $n = 0$:

$$n = 1\colon\ a_1 = 4a_0 - 3a_{-1} + 1 - 3$$
$$n = 0\colon\ a_0 = 4a_{-1} - 3a_{-2} + 1 + 0$$

Dohromady tak můžeme psát rekurenci jedinou formulkou:

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 - 3 \cdot [n = 1] + 0 \cdot [n = 0].$$

Řešení

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 - 3 \cdot [n = 1] + 0 \cdot [n = 0].$$

Tu nyní vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n = 0, 1, \ldots$, čímž dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum a_n x^n &= \sum (4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 1 - 3 \cdot [n = 1] + 0 \cdot [n = 0]) \cdot x^n \\ &= \underbrace{\sum 4a_{n-1} x^n}_{4x \cdot \sum a_{n-1} x^{n-1}} - \underbrace{\sum 3a_{n-2} x^n}_{3x^2 \cdot \sum a_{n-2} x^{n-2}} + \sum x^n - 3x + 0. \end{aligned}$$

Označíme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}$, tj.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}$$

(tady se hodí, že $a_{-1} = a_{-2} = 0$, jinak by v těch posledních dvou výrazech byly členy navíc). Tím se rovnice přepíše na

Řešení

$$f(x) = 4x \cdot f(x) - 3x^2 \cdot f(x) + \frac{1}{1-x} - 3x.$$

Převedením vyrazů obsahujících $f(x)$ na levou stranu a vytknutím dostaneme

$$(1 - 4x + 3x^2) \cdot f(x) = \frac{1}{1-x} - 3x$$

neboli

$$(1-3x)(1-x) \cdot f(x) = \frac{1 - 3x + 3x^2}{1-x}$$

Podělením koeficientem u $f(x)$ pak

$$f(x) = \frac{1 - 3x + 3x^2}{(1-x)^2(1-3x)}.$$

Řešení

Rozklad na parciální zlomky dá

$$f(x) = 3/4 \cdot \frac{1}{1-x} - 1/2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + 3/4 \cdot \frac{1}{1-3x}$$

a rozvinutím do mocninné řady pomocí zobecněné binomické věty

$$f(x) = 3/4 \cdot \sum \binom{n}{0} x^n - 1/2 \cdot \sum \binom{n+1}{1} x^n + 3/4 \cdot \sum \binom{n}{0} \underbrace{(3x)^n}_{3^n x^n}.$$

Celkový koeficient u x^n, tj. n-tý člen posloupnosti a_n, tedy je

$$\begin{aligned} a_n &= 3/4 \cdot \binom{n}{0} - 1/2 \cdot \binom{n+1}{1} + 3/4 \cdot \binom{n}{0} 3^n \\ &= 3/4 - 1/2 \cdot (n+1) + 3/4 \cdot 3^n. \end{aligned}$$

Příklad

Pomocí vytvořující funkce vyřešte následující rekurenci:

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$
$$a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2$$

Příklad

Pomocí vytvořující funkce vyřešte následující rekurenci:

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$
$$a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2$$

Řešení

Doplňme $a_{-1} = a_{-2} = 0$ a rozepišme podrobně druhou rovnici pro případ $n = 1$, $n = 0$:

$$n = 1 \colon a_1 = 5a_0 - 4a_{-1} - 3$$
$$n = 0 \colon a_0 = 5a_{-1} - 4a_{-2} + 1$$

Dohromady tak můžeme psát rekurenci jedinou formulkou:

$$a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} - 3 \cdot [n = 1] + 1 \cdot [n = 0].$$

Řešení

$$a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} - 3 \cdot [n=1] + 1 \cdot [n=0].$$

Tu nyní vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n = 0, 1, \ldots$, čímž dostaneme:

$$\begin{aligned}\sum a_n x^n &= \sum (5a_{n-1} - 4a_{n-2} - 3 \cdot [n=1] + 1 \cdot [n=0]) \cdot x^n \\ &= \underbrace{\sum 5a_{n-1}x^n}_{5x \cdot \sum a_{n-1}x^{n-1}} - \underbrace{\sum 4a_{n-2}x^n}_{4x^2 \cdot \sum a_{n-2}x^{n-2}} - 3x + 1.\end{aligned}$$

Označíme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}$, tím se rovnice přepíše na

$$f(x) = 5x \cdot f(x) - 4x^2 \cdot f(x) - 3x + 1.$$

Řešení

$$f(x) = 5x \cdot f(x) - 4x^2 \cdot f(x) - 3x + 1.$$

Převedením vyrazů obsahujících $f(x)$ na levou stranu a vytknutím dostaneme

$$(1 - 5x + 4x^2) \cdot f(x) = -3x + 1$$

neboli

$$(1 - 4x)(1 - x) \cdot f(x) = -3x + 1$$

Podělením koeficientem u $f(x)$ pak

$$f(x) = \frac{-3x + 1}{(1 - x)(1 - 4x)}.$$

Řešení

Rozklad na parciální zlomky dá

$$f(x) = 2/3 \cdot \frac{1}{1-x} + 1/3 \cdot \frac{1}{1-4x}$$

a rozvinutím do mocninné řady pomocí zobecněné binomické věty

$$f(x) = 2/3 \cdot \sum \binom{n}{0} x^n + 1/3 \cdot \sum \binom{n}{0} (4x)^n.$$

Celkový koeficient u x^n, tj. n-tý člen posloupnosti a_n, tedy je

$$\begin{aligned} a_n &= 2/3 \cdot \binom{n}{0} + 1/3 \cdot \binom{n}{0} 4^n \\ &= 2/3 + 1/3 \cdot 4^n. \end{aligned}$$

Příklad

Pomocí vytvořující funkce vyřešte následující rekurenci:

$$a_0 = 1, a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n \text{ pro } n \geq 2$$

Příklad

Pomocí vytvořující funkce vyřešte následující rekurenci:

$$a_0 = 1, a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n \text{ pro } n \geq 2$$

Řešení

Doplňme $a_{-1} = a_{-2} = 0$ a rozepišme podrobně druhou rovnici pro případ $n = 1$, $n = 0$:

$$n = 1\colon\ a_1 = a_0 + 2a_{-1} + (-1)^1 + 1$$
$$n = 0\colon\ a_0 = a_{-1} + 2a_{-2} + (-1)^0 + 0$$

Dohromady tak můžeme psát rekurenci jedinou formulkou:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n + 1 \cdot [n = 1] + 0 \cdot [n = 0].$$

Řešení

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n + 1 \cdot [n = 1] + 0 \cdot [n = 0].$$

Tu nyní vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n = 0, 1, \ldots,$ čímž dostaneme:

$$\begin{aligned}\sum a_n x^n &= \sum (a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n + 1 \cdot [n = 1] + 0 \cdot [n = 0]) \cdot x^n \\ &= \underbrace{\sum a_{n-1} x^n}_{x \cdot \sum a_{n-1} x^{n-1}} + \underbrace{\sum 2a_{n-2} x^n}_{2x^2 \cdot \sum a_{n-2} x^{n-2}} + \frac{1}{1+x} + x.\end{aligned}$$

Označíme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}$, tím se rovnice přepíše na

$$f(x) = x \cdot f(x) + 2x^2 \cdot f(x) + \frac{1}{1+x} + x.$$

Řešení

$$f(x) = x \cdot f(x) + 2x^2 \cdot f(x) + \frac{1}{1+x} + x.$$

Převedením vyrazů obsahujících $f(x)$ na levou stranu a vytknutím dostaneme

$$(1 - x - 2x^2) \cdot f(x) = \frac{1}{1+x} + x$$

neboli

$$(1 - 2x)(1 + x) \cdot f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1+x}$$

Podělením koeficientem u $f(x)$ pak

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(1+x)^2(1-2x)}.$$

Řešení

Rozklad na parciální zlomky dá

$$f(x) = -1/9 \cdot \frac{1}{1+x} + 1/3 \cdot \frac{1}{(1+x)^2} + 7/9 \cdot \frac{1}{1-2x}$$

a rozvinutím do mocninné řady pomocí zobecněné binomické věty

$$f(x) = -1/9 \cdot \sum \binom{n}{0} (-x)^n + 1/3 \cdot \sum \binom{n+1}{1} (-x)^n$$
$$+7/9 \cdot \sum \binom{n}{0} (2x)^n$$

Celkový koeficient u x^n, tj. n-tý člen posloupnosti a_n, tedy je

$$a_n = -1/9 \cdot \binom{n}{0} (-1)^n + 1/3 \cdot \binom{n+1}{1} (-1)^n + 7/9 \cdot \binom{n}{0} 2^n$$
$$= -1/9 \cdot (-1)^n + 1/3 \cdot (n+1)(-1)^n + 7/9 \cdot 2^n.$$

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_n &= a_{n-1} + n^2 \text{ pro } n \geq 1
\end{aligned}
$$

tedy najděte předpis pro $a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = 0$$
$$a_n = a_{n-1} + n^2 \text{ pro } n \geq 1$$

tedy najděte předpis pro $a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Řešení

Doplňme $a_{-1} = 0$ a rozepišme podrobně druhou rovnici pro případ $n = 0$:

$$n = 0\colon\ a_0 = a_{-1} + 0^2 + 0$$

Dohromady tak můžeme psát rekurenci jedinou formulkou:

$$a_n = a_{n-1} + n^2 + 0 \cdot [n = 0].$$

Řešení

$$a_n = a_{n-1} + n^2 + 0 \cdot [n = 0].$$

Tu nyní vynásobíme x^n a sečteme přes všechna $n = 0, 1, \ldots,$ čímž dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum a_n x^n &= \sum (a_{n-1} + n^2 + 0 \cdot [n = 0]) \cdot x^n \\ &= \underbrace{\sum a_{n-1} x^n}_{x \cdot \sum a_{n-1} x^{n-1}} + \sum n^2 \cdot x^n. \end{aligned}$$

Jako minule vyjádříme

$$n^2 = \underbrace{2 \cdot \binom{n+2}{2}}_{n^2+3n+2} - \underbrace{3 \cdot \binom{n+1}{1}}_{3n+3} + \underbrace{\binom{n+0}{0}}_{1}$$

$$\sum n^2 \cdot x^n = 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} - 3 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + 1 \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Řešení

Označíme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}$, tím se rovnice přepíše na

$$f(x) = x \cdot f(x) + 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} - 3 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + 1 \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Převedením vyrazů obsahujících $f(x)$ na levou stranu a vytknutím dostaneme

$$(1-x) \cdot f(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} - 3 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + 1 \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Podělením koeficientem u $f(x)$ pak

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^4} - 3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} + 1 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Řešení

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^4} - 3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} + 1 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

Rozvinutím do mocninné řady pomocí zobecněné binomické věty

$$f(x) = 2 \cdot \sum \binom{n+3}{3} x^n - 3 \sum \binom{n+2}{2} x^n + \sum \binom{n+1}{1} x^n.$$

Celkový koeficient u x^n, tj. n-tý člen posloupnosti a_n, tedy je

$$a_n = 2 \cdot \binom{n+3}{3} - 3 \cdot \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{1}.$$

Řešení

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^4} - 3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} + 1 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

Rozvinutím do mocninné řady pomocí zobecněné binomické věty

$$f(x) = 2 \cdot \sum \binom{n+3}{3} x^n - 3 \sum \binom{n+2}{2} x^n + \sum \binom{n+1}{1} x^n.$$

Celkový koeficient u x^n, tj. n-tý člen posloupnosti a_n, tedy je

$$a_n = 2 \cdot \binom{n+3}{3} - 3 \cdot \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{1}.$$

Úzce to samozřejmě souvisí s:

$$n^2 = 2 \cdot \binom{n+2}{2} - 3 \cdot \binom{n+1}{1} + \binom{n+0}{0}.$$