4. cvičení z MB141, jaro 2020

Pokuste se spočítat všechny příklady.

Příklad. 1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou vektorové podprostory.

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}[x] | \; f(3) = 0, \; f(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$,
(b) $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | \; a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
(c) $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | \; \det A = 0\} \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$,
(d) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \; f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

Příklad. 2. Nechť M je podprostor $\mathbb{R}^5$ generovaný vektory $v_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (2, -1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -3, -1, 1, 0)$, $v_4 = (1, 7, 3, -1, 2)$. Rozhodněte, zda jsou vektory nezávislé. Pokud ne, vyberte z nich bázi podprostoru M a zbylé vektory vyjádřete v této bázi.

Příklad. 3. Doplňte bázi podprostoru M z předchozího příkladu na bázi celého $\mathbb{R}^5$.

Příklad. 4. Spočtěte souřadnice polynomu $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ v bázi

$$\alpha = (1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + 2x + x^3, 1 + x + 3x^2 - x^3, 2 + 2x + 4x^2 + 5x^3)$$

prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Řešení. $(-10, 2, 7, 1)$ □

Příklad. 5. Najděte bázi a dimenzi podprostoru U v $\mathbb{R}^5$ všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \end{array}$$

Příklad. 6. Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$P = [(4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)],$$
$$Q = [(1, -1, 0, 2), (2, 2, -1, 3), (0, 1, 1, 0)].$$

Řešení. Průnik má dimenzi 2 a bázi např. $(1, -1, 0, 2), (-2, -1, 2, -3)$. □

Příklad. 7. Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] | \; f(1) = 0, \; f(2) = 0\} \quad \text{a} \quad Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] | \; g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

Řešení. $\dim P = 3$, $\dim Q = 3$, $\dim P \cap Q = 1$, $\dim P + Q = 5$, tedy $P + Q = \mathbb{R}_4[x]$. Více na http://www.math.muni.cz/~xfrancirekp/vyuka/seste_cviceni/osme_cviceni.pdf □