1.příklad

ⓐ

Rozhodněte, zda následující množiny jsou vektorové podprostory.

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(3) = 0,\ f(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$,
(b) $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
(c) $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\} \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$,
(d) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

V vektorový prostor, $U \subseteq V$ je podprostor, jestliže $U \neq \emptyset$ a platí

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \forall u, v \in U \quad u+v \in U \\ (2)\ \forall u \in U, a \in \mathbb{R} \quad au \in U \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} \forall a, b \in \mathbb{R} \\ \forall u, v \in U \\ au + bv \in U \end{array}$$

(a) Sčítání polynomů $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Násobení číslem $(af)(x) = a f(x)$.

U je vekt. podprostor, neboť

Pro $f, g \in U \Rightarrow f(3) = 0 = f(-1) \wedge g(3) = 0 = g(-1)$. Proto
$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0$, $(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 0 + 0 = 0$

Tedy $f + g \in U$. Analogicky uděláme pro součin.

1.příklad

b

Rozhodněte, zda následující množiny jsou vektorové podprostory.

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}[x] |\ f(3) = 0,\ f(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$,

(b) $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\ a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

(c) $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) |\ \det A = 0\} \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

(d) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

(b) V není vektorový podprostor v $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in V$, neboť $a_{11} + a_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$,

ale $2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin V$, neboť $(2A)_{11} + (2A)_{22} = 1 + 1 = 2$.

1.příklad

C

Rozhodněte, zda následující množiny jsou vektorové podprostory.

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}[x] | \ f(3) = 0, \ f(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$,
(b) $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | \ a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
(c) $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | \ \det A = 0\} \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$,
(d) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \ f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

(c) W není vekt. podprostor v $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in W,$$ neboť $\det A = 0$ (A má 1. řádek nulový)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \in W,$$ neboť $\det B = 0$, (B má nulový 2. až n-tý řádek)

$$A + B = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ $\det E = 1$, tedy $E = A + B \notin W$.

d

1.příklad

Rozhodněte, zda následující množiny jsou vektorové podprostory.

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}[x] |\ f(3) = 0,\ f(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$,

(b) $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\ a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

(c) $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) |\ \det A = 0\} \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

(d) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

(d) Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou posloupnosti $f(1), f(2), \ldots$ Sčítáme je takto: $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$

Násobíme číslem: $(af)(n) = a \cdot f(n)$.

Z je vektorový podprostor. ~~[illegible]~~ Je neprázdný: $f(n) = 0$ pro všechna n leží v Z. Dále: jestliže $f, g \in Z$, pak

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1)$$
$$g(n+1) = g(n) + g(n-1)$$

Pro $f+g$ platí $(f+g)(n+1) = f(n+1) + g(n+1) =$
$= f(n) + f(n-1) + g(n) + g(n-1) = \big(f(n) + g(n)\big) + \big(f(n-1) + g(n-1)\big)$
$= (f+g)(n) + (f+g)(n-1)$. Tedy $f+g \in Z$. Analogicky $a \cdot f$.

2. příklad

(a)

Nechť M je podprostor $\mathbb{R}^5$ generovaný vektory $v_1 = (1,2,1,0,1)$, $v_2 = (2,-1,0,1,1)$, $v_3 = (1,-3,-1,1,0)$, $v_4 = (1,7,3,-1,2)$. Rozhodněte, zda jsou vektory nezávislé. Pokud ne, vyberte z nich bázi podprostoru M a zbylé vektory vyjádřete v této bázi.

Vektory v_1, v_2, v_3, v_4 jsou nezávislé, jestliže rovnice

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = \vec{o}$$ v neznámých a_1, a_2, a_3, a_4

má pouze triviální řešení $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

V našem případě máme

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}
a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 &= 0 \\
2a_1 - a_2 - 3a_3 + 7a_4 &= 0 \\
a_1 - a_3 + 3a_4 &= 0 \\
a_2 + a_3 - a_4 &= 0 \\
a_1 + a_2 + 2a_4 &= 0
\end{aligned}$$

Řešíme:

b

2. příklad

Nechť M je podprostor $\mathbb{R}^5$ generovaný vektory $v_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (2, -1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -3, -1, 1, 0)$, $v_4 = (1, 7, 3, -1, 2)$. Rozhodněte, zda jsou vektory nezávislé. Pokud ne, vyberte z nich bázi podprostoru M a zbylé vektory vyjádřete v této bázi.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_2 + a_3 - a_4 = 0$

Vezmeme a_4 a a_3 lze volit za nenulové parametry.

Soustava má řešení

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \neq (0, 0, 0, 0).$$

Tedy vektory v_1, v_2, v_3, v_4 jsou lineárně závislé.

Ukážeme, že v_1 a v_2 jsou lineárně nezávislé.

Řešíme $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$.

K tomu stačí použít 1. a 2. sloupec předchozího výpočtu.

2. příklad

(c)

Nechť M je podprostor $\mathbb{R}^5$ generovaný vektory $v_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (2, -1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -3, -1, 1, 0)$, $v_4 = (1, 7, 3, -1, 2)$. Rozhodněte, zda jsou vektory nezávislé. Pokud ne, vyberte z nich bázi podprostoru M a zbylé vektory vyjádřete v této bázi.

Vidíme, že $a_1 = a_2 = 0$. Tedy v_1 a v_2 jsou lin. nez.
Vektor v_3 je lin. kombinací v_1 a v_2. K tomu stačí ukázat, že rovnice

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = v_3$$

má řešení. To ale zase vidíme z předchozího výpočtu – stačí se omezit na 1., 2. a 3. sloupec

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení. Analogicky ukážeme, že $\underline{v_4}$ je lin. kombinací $\underline{v_1}$ a $\underline{v_2}$.

Řešení je $v_3 = -v_1 + v_2$, $v_4 = 3v_1 - v_2$.

2. příklad

(a)

Nechť M je podprostor $\mathbb{R}^5$ generovaný vektory $v_1 = (1,2,1,0,1)$, $v_2 = (2,-1,0,1,1)$, $v_3 = (1,-3,-1,1,0)$, $v_4 = (1,7,3,-1,2)$. Rozhodněte, zda jsou vektory nezávislé. Pokud ne, vyberte z nich bázi podprostoru M a zbylé vektory vyjádřete v této bázi.

$M = [v_1, v_2, v_3, v_4] = \{ a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 \in \mathbb{R}^5, a_i \in \mathbb{R} \}$

Protože v_3 a v_4 jsou lineární kombinace v_1 a v_2, dokážeme

$$M = [v_1, v_2].$$

Vektory v_1, v_2 generují M (každý prvek M je jejich lineární kombinací) a jsou lineárně nezávislé, proto tvoří <u>bázi</u> podprostoru M.

3. příklad

Doplňte bázi podprostoru M z předchozího příkladu na bázi celého $\mathbb{R}^5$.

K vektorům v_1 a v_2 přidáme vektory $e_1 = (1,0,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0,0)$, e_3, e_4, $e_5 = (0,0,0,0,1)$ standardní báze $\mathbb{R}^5$. Zřejmě platí

$$[v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5] = \mathbb{R}^5.$$

Z vektorů $v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ (zapsaných v tomto pořadí) vybereme maximální seznam lineárně nezávislých. To bude báze $\mathbb{R}^5$.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cc|ccccc}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cc|ccccc}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cc|ccccc}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0
\end{array}\right)$$

3. příklad

b

Doplňte bázi podprostoru M z předchozího příkladu na bázi celého $\mathbb{R}^5$.

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \downarrow 1. & \downarrow 2. & \downarrow 3. & \downarrow 4. & \downarrow 5. & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Vedoucí koeficienty stojí ve sloupcích 1, 2, 3, 4, 5. Proto jsou vektory tímto sloupcům odpovídající, tj.

v_1, v_2, e_1, e_2, e_3 lineárně nezávislé.

Tyto vektory tedy tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^5$ a tato báze vznikla doplněním vektorů v_1 a v_2.

4. příklad

a

Spočtěte souřadnice polynomu $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ v bázi

$$\alpha = (1+x+2x^2-x^3, 1+2x+x^3, 1+x+3x^2-x^3, 2+2x+4x^2+5x^3)$$

prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Souřadnice vektoru $u \in V$ v bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ prostoru V jsou koeficienty v lineární kombinaci

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 .$$

Tedy je to čtveřice čísel (a_1, a_2, a_3, a_4). Obvykle ji budeme psát jako sloupec a značit

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

V našem případě

$$a_1(1+x+2x^2-x^3) + a_2(1+2x+x^3) + a_3(1+x+3x^2-x^3) + a_4(2+2x+4x^2+5x^3) = 1+3x+5x^2+10x^3$$

4. příklad

b

Spočtěte souřadnice polynomu $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ v bázi

$$\alpha = (1{+}x{+}2x^2{-}x^3, 1{+}2x{+}x^3, 1{+}x{+}3x^2{-}x^3, 2{+}2x{+}4x^2{+}5x^3)$$

prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Porovnáním koeficientů u mocnin $x^3, x^2, x, x^0 = 1$ dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x^3 &: \quad -a_1 + a_2 - a_3 + 5a_4 = 10 \\
x^2 &: \quad 2a_1 + 3a_3 + 4a_4 = 5 \\
x &: \quad a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 = 3 \\
1 &: \quad a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 = 1
\end{aligned}$$

Tu řešíme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 5 & 10 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 11 \end{array}\right) \sim$$

4. příklad

e

Spočtěte souřadnice polynomu $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ v bázi

$$\alpha = (1+x+2x^2-x^3, 1+2x+x^3, 1+x+3x^2-x^3, 2+2x+4x^2+5x^3)$$

prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

Dostáváme

$a_4 = 1$

$a_3 = 7$

$a_2 = 2$

$a_1 = 1 - a_2 - a_3 - 2a_4 = -10$

Souřadnice polynomu $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ v bázi α jsou $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. O správnosti výpočtu se lze přesvědčit zkouškou.

5. příklad

Najděte bázi a dimenzi podprostoru U v $\mathbb{R}^5$ všech řešení soustavy rovnic

a

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Nejdříve je potřeba soustavu vyřešit

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 4 & -8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & 10 & -16 & -9 \end{pmatrix}$$

x_3, x_4 a x_5 můžeme volit jako parametry. Vzhledem k tomu, že při výpočtu x_2 budeme dělit 7, uděláme to takto

$x_5 = 7p$, $x_4 = 7q$, $x_3 = 7s$. Potom

$$-7x_2 = -10x_3 + 16x_4 + 9x_5 = (-10)\cdot 7s + 16\cdot 7q + 9\cdot 7p$$

$$x_2 = 10s - 16q - 9p$$

5. příklad

b

Najděte bázi a dimenzi podprostoru U v $\mathbb{R}^5$ všech řešení soustavy rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0
\end{array}
$$

$$x_1 = -2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 =$$
$$= -20s + 32q + 18p + 21s - 28q - 35p$$
$$= s + 4q - 17p \,.$$

Tedy

$$U = \{(s+4q-17p,\ 10s-16q-9p,\ 7s,\ 7q,\ 7p) \in \mathbb{R}^5;\ p,q,s \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{s(1,10,7,0,0) + q(4,-16,0,7,0) + p(-17,-9,0,0,7) \in \mathbb{R}^5\}$$
$$= [(1,10,7,0,0),\ (4,-16,0,7,0),\ (-17,-9,0,0,7)]$$

Tyto tři vektory jsou lineárně nezávislé. Proto tvoří bázi podprostoru U.

6. příklad

ⓐ

Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$P = [\overset{u_1}{(4, 0, -2, 6)}, \overset{u_2}{(2, 1, -2, 3)}, \overset{u_3}{(3, 1, -2, 4)}],$$
$$Q = [\underset{v_1}{(1, -1, 0, 2)}, \underset{v_2}{(2, 2, -1, 3)}, \underset{v_3}{(0, 1, 1, 0)}].$$

Označíme generátory P jako u_1, u_2, u_3 a generátory Q jako v_1, v_2, v_3. Vektor $z \in P \cap Q$, právě když

$$z = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3$$

pro nějaká reálná čísla $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Řešíme tedy v neznámých $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ příslušnou soustavu:

$$a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b

6. příklad

Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$P = [(4,0,-2,6),(2,1,-2,3),(3,1,-2,4)],$$
$$Q = [(1,-1,0,2),(2,2,-1,3),(0,1,1,0)].$$

Pomocí matice to napíšeme takto

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Poslední řádek dává rovnici $0 = 2b_2 + 2b_3$. Zvolíme $b_3 = p$ a spočítáme $b_2 = -p$. 3. řádek dává rovnici $a_3 = -b_1 + 4b_2 + 4b_3$. Zvolíme $b_1 = q$.

6. příklad

C

Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$P = [(4, 0, \overset{u_1}{-2}, 6), (2, 1, \overset{u_2}{-2}, 3), (3, 1, \overset{u_3}{-2}, 4)],$$
$$Q = [(1, -1, \underset{v_1}{0}, 2), (2, 2, \underset{v_2}{-1}, 3), (0, 1, \underset{v_3}{1}, 0)].$$

a_3, a_2, a_1 lze nyní spočítat, ale nebudeme to počítat, protože to není potřeba. Máme

$$(b_1, b_2, b_3) = (q, -p, p).$$

Každý vektor z $P \cap Q$ je tedy tvaru

$$z = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 = q v_1 - p v_2 + p v_3$$

Tedy $P \cap Q = \{ q v_1 + p(v_3 - v_2) \in \mathbb{R}^4 \mid p, q \in \mathbb{R} \}$

$$= [v_1, v_3 - v_2] = [(1, -1, 0, 2), (-2, -1, 2, -3)]$$

Vektory v_1, $v_3 - v_2$ jsou lin. nezávislé (jeden není násobkem druhého), tvoří tedy bázi $P \cap Q$.

$$\dim(P \cap Q) = 2.$$

6. příklad

(d)

Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$P = [\overset{u_1}{(4,0,-2,6)}, \overset{u_2}{(2,1,-2,3)}, \overset{u_3}{(3,1,-2,4)}],$$
$$Q = [\underset{v_1}{(1,-1,0,2)}, \underset{v_2}{(2,2,-1,3)}, \underset{v_3}{(0,1,1,0)}].$$

Součet $P+Q = \{ u+v \in \mathbb{R}^4 \mid u \in P,\ v \in Q \} =$

$= \{ a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \in \mathbb{R}^4 \mid a_i, b_i \in \mathbb{R} \}$

$= [u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3]$. K určení báze $P+Q$, stačí tedy vybrat z těchto 6 vektorů maximální seznam lineárně nezávislých. K výpočtu použijeme předchozí výpočet průniku:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Lineárně nezávislé jsou vektory odpovídající sloupcům s vedoucími koeficienty tj. u_1, u_2, u_3, v_1.

$\dim(P+Q) = 4$.

e

6. příklad

Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$P = [(4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)],$$
$$Q = [(1, -1, 0, 2), (2, 2, -1, 3), (0, 1, 1, 0)].$$

Protože $P+Q \subseteq \mathbb{R}^4$ a $\dim(P+Q) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$,

musí být $P+Q = \mathbb{R}^4$.

Dále platí $\dim P + \dim Q = \dim(P+Q) + \dim(P \cap Q)$

V našem případě $3 + 3 = 4 + 2$.

Takto je možno provést částečnou kontrolu správnosti výpočtu.

7. příklad

(a)

Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(1) = 0,\ f(2) = 0\}$$
$$Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] \mid g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

Báze Q: $g(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$g(x) = g(-x)$ znamená, že

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_4 (-x)^4 + a_3 (-x)^3 + a_2 (-x)^2 + a_1 (-x) + a_0$$
$$= a_4 x^4 - a_3 x^3 + a_2 x^2 - a_1 x + a_0$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\left.\begin{aligned} a_4 &= a_4 \\ a_3 &= -a_3 \\ a_2 &= a_2 \\ a_1 &= -a_1 \\ a_0 &= a_0 \end{aligned}\right\}$$

Odtud $a_3 = 0$, $a_1 = 0$

$$Q = \{a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 \in \mathbb{R}_4[x] \mid a_i \in \mathbb{R}\} = [x^4, x^2, 1]$$

Báze Q je $1, x, x^4$.

$\dim Q = 3$.

7. příklad

b

Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(1) = 0,\ f(2) = 0\}$$
$$Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] \mid g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

Báze P : 1. způsob $\quad f(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$

$$0 = f(1) = b_4 + b_3 + b_2 + b_1 + b_0$$
$$0 = f(2) = 16b_4 + 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0$$

Tuto soustavu vyřešíme

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

b_4, b_3, b_2 budeme považovat za parametry.

Spočítáme $\quad b_1 = -3b_2 - 7b_3 - 15b_4\ ,\quad b_0 = 3b_2 + 7b_3 + 15b_4 - b_2 - b_3 - b_4$
$$= 2b_2 + 6b_3 + 14b_4$$

Tedy $P = \{b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 - (3b_2 + 7b_3 + 15b_4)x + (2b_2 + 6b_3 + 14b_4) \in \mathbb{R}_4[x],\ b_i \in \mathbb{R}\} = \{b_4(x^4 - 15x + 14) + b_3(x^3 - 7x + 6) + b_2(x^2 - 3x + 2) \in \mathbb{R}_4[x]\} = [x^4 - 15x + 14,\ x^3 - 7x + 6,\ x^2 - 3x + 2]$

7. příklad

(c)

Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(1) = 0,\ f(2) = 0\}$$
$$Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] \mid g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

<u>Báze P</u> je $x^4 - 15x + 14$, $x^3 - 7x + 6$, $x^2 - 3x + 2$. $\dim P = 3$.

<u>2. způsob</u> jsou-li čísla 1 a 2 kořeny polynomu $f \in \mathbb{R}^4[x]$, pak $f(x) = (x-1)(x-2)(c_2 x^2 + c_1 x + c_0)$

Tedy báze P je rovněž $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-2)x$, $(x-1)(x-2)x^2$.

<u>Báze $P \cap Q$</u> <u>1. způsob</u> Vezmeme bázi Q: $1, x^2, x^4$ a bázi P: $x^4 - 15x + 14$, $x^3 - 7x + 6$, $x^2 - 3x + 2$.

$h \in P \cap Q$

$$h(x) = b_4(x^4 - 15x + 14) + b_3(x^3 - 7x + 6) + b_2(x^2 - 3x + 2) = a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0$$

Dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} a_4 &= b_4 \\ 0 &= b_3 \\ a_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad \left\| \qquad \begin{aligned} 0 &= -15 b_4 - 7 b_3 - 3 b_2 \\ a_0 &= 14 b_4 + 6 b_3 + 2 b_2 \end{aligned} \right.$$

7. příklad

d

Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(1) = 0,\ f(2) = 0\}$$
$$Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] \mid g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

$$\begin{array}{cccccc} a_4 & a_2 & a_0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -7 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -7 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(the right-hand block of the second matrix is headed $b_2\ b_3\ b_4$)

Dostáváme $b_3 = 0$, $-3b_2 - 7b_3 - 15b_4 = 0$. Tedy řešení je $(b_2, b_3, b_4) = (-5s, 0, s)$. Polynomy v průniku jsou

$$-5s\,(x^2 - 3x + 2) + s\,(x^4 - 15x + 14) = s\,(x^4 - 5x^2 + 4)$$

Báze průniku je $x^4 - 5x^2 + 4$. $\dim(P \cap Q) = 1$.

7. příklad

e

Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(1) = 0,\ f(2) = 0\}$$
$$Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] \mid g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

<u>Báze $P \cap Q$</u> <u>2. způsob</u> K počítání průniku vezmeme bázi P: $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-2)x$, $(x-1)(x-2)x^2$

$h \in P \cap Q$ $\quad h(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0$

$$= c_0(x-1)(x-2) + c_1(x-1)(x-2)x + c_2(x-1)(x-2)x^2$$
$$= c_0(x^2-3x+2) + c_1(x^3-3x^2+2x) + c_2(x^4-3x^3+2x^2)$$

Porovnáním koeficientů u mocnin x dostaneme soustavu s maticí:

$$\begin{array}{cccccc} a_4 & a_2 & a_0 & c_0 & c_1 & c_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

7. příklad

Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] | \ f(1) = 0, \ f(2) = 0\}$$
$$Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] | \ g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

f

Dostáváme $c_1 - 3c_2 = 0$, $-3c_0 + 2c_1 = 0$. Odtud $(c_0, c_1, c_2) = (2s, 3s, s)$ Tedy v $P \cap Q$ leží polynomy
$2s(x-1)(x-2) + 3s(x-1)(x-2)x + s(x-1)(x-2)x^2 =$
$= s(x-1)(x-2)\{2 + 3x + x^2\} = s(x-1)(x-2)((x+2)(x+1))$

Báze $P \cap Q$ je tvořena polynomem $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
$= (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Báze $P \cap Q$ 3. způsob Polynom z $P \cap Q$ je sudý ($f(x) = f(-x)$) a má kořeny 1 a 2. Tedy pro $h \in P \cap Q$ je $h(-1) = h(1) = 0$, $h(-2) = h(2) = 0$. Tedy h má kořeny 1, 2, -1, -2. Proto $h(x) = (x-1)(x-2)(x+1)(x+2)s$
$= s(x^4 - 5x^2 + 4)$

7. příklad

9

Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(1) = 0,\ f(2) = 0\}$$
$$Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] \mid g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

Báze $P+Q$: $\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)$
$= 3 + 3 - 1 = 5.$

$P+Q \subseteq \mathbb{R}_4[x]$ a $\dim(P+Q) = 5 = \dim \mathbb{R}_4[x].$

Proto $P+Q = \mathbb{R}_4[x]$. Tedy báze $P+Q$ je

například $1, x, x^2, x^3, x^4.$