# Domácí úloha z MB141, týden 04

**Příklad. 1.** [*3 body.*] Rozhodněte, zda následující množiny jsou vektorové podprostory. Pokud ano, najděte jejich báze a dimenze:

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}_4[x] |\ f(3) = 0,\ f(1) = f(0) + 1\} \subset \mathbb{R}_4[x]$,
(b) $V = \{f \in \mathbb{R}_4[x] |\ f(3) = 0,\ f(0) = f(1)\} \subset \mathbb{R}_4[x]$.
(c) $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = A^T\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $A^T$ značí transponovanou matici. Čtvercové matice s vlastností $A = A^T$ se nazývají symetrické.

**Příklad. 2.** [*3 body*] Nechť $M$ je podprostor $\mathbb{R}^5$ generovaný vektory $v_1 = (1, 2, 3, 1, 0)$, $v_2 = (2, -1, 2, 1, 3)$, $v_3 = (3, 1, 5, 2, 3)$, $v_4 = (2, 1, 0, 1, 1)$. Vyberte z nich bázi podprostoru. Rozhodněte, zda vektor $u = (1, 1, 2, 0, 0)$ leží v $M$.

**Příklad. 3.** [*1 bod*] Doplňte bázi podprostoru $M$ z předchozího příkladu na bázi celého $\mathbb{R}^5$.

**Příklad. 4.** [*1 bod*] Spočtěte souřadnice matice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$ v bázi

$$\alpha = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matic $2 \times 2$.

**Příklad. 5.** [*2 body*] Najděte bázi a dimenzi podprostoru $U$ v $\mathbb{R}^5$ všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

**Příklad. 6.** [*3 body*] Najděte bázi a dimenze součtu a průniku podprostorů $U$ a $V$ v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$U = [(1, 1, -1, -1), (2, 3, 2, -2)],$$
$$V = [(2, 0, 1, 1), (4, 4, 7, -1), (0, 1, 1, 0)].$$

**Příklad. 7.** [*4 body*] Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_5[x] |\ f(1) = 0,\ f(-1) = 0\} \quad \text{a} \quad Q = \{g \in \mathbb{R}_5[x] |\ g(-x) = -g(x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.