5. cvičení z MB141, jaro 2020

Příklad. 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1x_2$,
(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2)$,
(c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2)^2)$,
(d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2))$.

Příklad. 2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = u_1,\ \varphi(u_2) = u_3,\ \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Příklad. 3. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 - x_3 = 0$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.

Příklad. 4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 5. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 6. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 7. Zjistěte, zda v $\mathbb{R}^3$ existuje báze tvořená vlastními vektory matice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, najděte ji.

Příklad. 8. Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$