MB141 – 5. cvičení
Lineární zobrazení

Martin Čadek

Jarní semestr 2020

A

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1 x_2$,

Lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ je takové, že

(1) $\forall v_1, v_2 \in V : \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$

(2) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall v \in V\ \ \varphi(av) = a\varphi(v)$

$\iff \forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall v_1, v_2 \in V\ \ \varphi(av_1 + bv_2) = a\varphi(v_1) + b\varphi(v_2)$

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1 x_2$ <u>není lineární</u>

Vezměme vektor $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ a číslo $a = 2$.

$\varphi(a \cdot (1,1)) = \varphi(2 \cdot (1,1)) = \varphi(2,2) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8$, ale

$a\,\varphi(1,1) = 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 2 \cdot 3 = 6$.

$a\varphi(1,1) \neq \varphi(a(1,1))$.

(B)

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2)$,

Toto zobrazení je lineární: $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$\varphi(x+y) = \varphi(x_1+y_1, x_2+y_2) = \big(2(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2), 5(x_2+y_2),$
$((x_1+y_1) - (x_2+y_2)\big) = \big((2x_1 - 3x_2) + (2y_1 - 3y_2), 5x_2 + 5y_2,$
$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\big) = \cancel{\varphi(x_1, x_2) + \varphi(y_1, y_2)}$
$= (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2) + (2y_1 - 3y_2, 5y_2, y_1 - y_2) =$
$= \varphi(x_1, x_2) + \varphi(y_1, y_2)$

Analogicky ukážeme, že

$$\varphi(a(x_1, x_2)) = a\,\varphi(x_1, x_2).$$

BB

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2)$,

V bázi $((1,0), (0,1))$ prostoru $\mathbb{R}^2$ a v bázi $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ prostoru $\mathbb{R}^3$ lze $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ napsat takto:

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 5x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

(c)

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

(c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(p) = (p(1), p(2)^2)$,

Toto zobrazení <u>není lineární</u>. Vezmeme polynomy $p(x) = x$ a $q(x) = x^2$

Platí

$$\varphi(p+q) = \left((p+q)(1), (p+q)(2)^2\right) = (2, 36)$$

$$\varphi(p) + \varphi(q) = \left(p(1), p(2)^2\right) + \left(q(1), q(2)^2\right) =$$

$$= (1, 2^2) + (1, 4^2) = (2, 20)$$

$$\varphi(p+q) \neq \varphi(p) + \varphi(q).$$

D

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

(d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(p) = (p(1), p(2))$.

Toto zobrazení je lineární. $p, q \in \mathbb{R}_3[x]$ polynomy, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\varphi(ap + bq) = ((ap+bq)(1), (ap+bq)2) =$$
$$= (a\,p(1) + b\,q(1),\ a\,p(2) + b\,q(2)) = a(p(1), p(2))$$
$$+ b(q(1), q(2)) = a\,\varphi(p) + b\,\varphi(q).$$

$$\varphi(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a+b+c+d,\ 8a+4b+2c+d)$$

Proto v souřadnicích báze $(x^3, x^2, x, 1)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ a v souřadnicích báze $((1,0), (0,1))$ prostoru $\mathbb{R}^2$

DD

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

(d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(p) = (p(1), p(2))$.

máme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ 8a+4b+2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Příklad 2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

A

$$\varphi(u_1) = u_1, \; \varphi(u_2) = u_3, \; \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Jestliže má být $\varphi(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

pak $\varphi(e_1) = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\varphi(e_2) = \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ a

$\varphi(e_3) = \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$. K určení matice A tedy potřebujeme spočítat $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ a $\varphi(e_3)$. To uděláme takto: Napíšeme vektory u_1, u_2 a u_3 do řádků matice a za nimi napíšeme sloupce

Příklad 2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

B

$$\varphi(u_1) = u_1, \; \varphi(u_2) = u_3, \; \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

zobrazení φ na nich, tj. $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ a $\varphi(u_3)$.

$$\left(\begin{array}{c|c} u_1 & \varphi(u_1) \\ u_2 & \varphi(u_2) \\ u_3 & \varphi(u_3) \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{c|c} e_1 & \varphi(e_1) \\ e_2 & \varphi(e_2) \\ e_3 & \varphi(e_3) \end{array}\right)$$

Provádíme elementární řádkové operace. Ty zachovávají, díky tomu, že φ je lineární, skutečnost

$$\big(v \mid \varphi(v)\big) \quad (\text{vektor} \mid \text{jeho obraz ve } \varphi).$$

V našem konkrétním případě počítáme takto:

c

Příklad 2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = u_1,\ \varphi(u_2) = u_3,\ \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 1 & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1 & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 & 0, & 1, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tedy
$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$
Dosazením vektorů u_1, u_2, u_3 se přesvědčíme, že jsme počítali dobře. Např.:

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 - x_3 = 0$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.

A

Jestliže se nám podaří určit hodnoty zobrazení φ ~~[illegible]~~ na vektorech nějaké báze $\mathbb{R}^3$, můžeme matici B určit stejným postupem jako v předchozí úloze, neboť symetrie podle roviny, která prochází počátkem $\mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení. Vezměme dva lineárně nezávislé vektory v rovině $x_1 - x_3 = 0$. Například $u_1 = (1,0,1)$ a $u_2 = (0,1,0)$. Určitě $\varphi(u_1) = u_1$ a $\varphi(u_2) = u_2$. Nyní vezmeme vektor kolmý na rovinu $x_1 - x_3 = 0$. Zde použijeme s předpisem skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^3$, který je definován takto:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

Příklad 3. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 - x_3 = 0$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.

B

Vidíme, že vektor $u_3 = (1, 0, -1)$ je kolmý k vektorům u_1 a u_2, tudíž i ke všem vektorům roviny $x_1 - x_3 = 0$.

(Všimněte si, že souřadnice vektoru u_3 jsou koeficienty v rovnici $x_1 - x_3 = 0 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (-1) x_3$.)

u_3 je normálový vektor roviny $x_1 - x_3 = 0$. Symetrie podle roviny ho zobrazí do opačného vektoru, tedy

$$\varphi(u_3) = -u_3 .$$

Nyní již můžeme stejně jako v předchozím příkladu spočítat obrazy $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & +1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Příklad 3. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 - x_3 = 0$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.

C

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Symetrie podle roviny $x_1 - x_3 = 0$ přehazuje 1. a 3. souřadnici. Dosazením vektorů u_1, u_2, u_3 se přesvědčíme, že jsme počítali správně.

(A)

Příklad 4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo, jestliže existuje nenulový vektor $u \in \mathbb{R}^2$ takový, že

$$\varphi(u) = \lambda u.$$

u se nazývá vlastní vektor.

Tedy v souřadnicích

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní s

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(B)

Příklad 4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Taková soustava rovnic má nenulové řešení, právě když

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Výpočtem determinantu získáme tzv. charakteristický polynom zobrazení φ (nebo také matice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$).

Ten je $(2-\lambda)(-\lambda) - 3 \cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1)$.

Kořeny tohoto polynomu pak $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1$. To pak i vlastní čísla zobrazení φ. Najdeme vlastní vektory k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$. Řešíme homogenní soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C

Příklad 4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Matice soustavy

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení je $\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vlastní vektory k vl. číslu $\lambda_1 = 3$ jsou $p(1,1)$ pro $p \neq 0$.

Vlastní vektory k $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$ řešení $\begin{pmatrix} q \\ -3q \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Vlastní vektory k vl. čísla $\lambda_2 = -1$ jsou $q(1,-3)$ pro $q \neq 0$.

Příklad 5. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Řešíme analogicky jako předchozí úlohu.

Charakteristický polynom je

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 5 = \lambda^2 + 1$$

Tento polynom nemá reálný kořen (pouze komplexní $\pm i$). Proto dané zobrazení nemá reálná vlastní čísla ani vlastní vektory.

Příklad 6. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

A

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla a vektory matice B jsou vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení $\varphi(x) = Bx$, tj. splňují $Bx = \lambda x$, kde $x \neq (0,0,0)$.

Spočítáme charakteristický polynom:

$$\det(B - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(8-\lambda) + 1\cdot 1\cdot 4 + 0\cdot 0\cdot(-17) - 4(-\lambda)\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot(8-\lambda) - (-\lambda)1(-17)$$

$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4$. Prvně se pokusíme najít celočíselný kořen. Ten musí dělit absolutní člen 4. Hledáme tedy mezi čísly $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Zjistíme, že dosazením $\lambda_1 = 4$ dostaneme $-4^3 + 8\cdot 4^2 - 17\cdot 4 + 4 = 0$. Vydělením polynomu $-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4$ polynomem $(\lambda - 4)$ dostaneme

Příklad 6. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

(B)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}.$$

$-\lambda^3+8\lambda^2-17\lambda+4 = (\lambda-4)(-\lambda^2+4\lambda-1)$. Řešením kvadratické rovnice

$$\lambda^2-4\lambda+1=0$$

dostaneme další dva kořeny $\lambda_2 = \dfrac{4+\sqrt{16-4\cdot1\cdot1}}{2}$

$\lambda_2 = 2+\sqrt{3}$ a $\lambda_3 = \dfrac{4-\sqrt{16-4\cdot1\cdot1}}{2} = \dfrac{4-\sqrt{12}}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} =$

$\lambda_3 = 2-\sqrt{3}$.

<u>Vlastní vektory k $\lambda_1=4$</u>

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & -17 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & -17 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -16 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení je $p\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$. jestliže $x_3=a$, dostaneme $x_2=\frac{1}{4}a$ a $x_1=\frac{1}{16}a$. Volme proto $x_3=16p$, $x_2=4p$, $x_1=p$.

To jsou vlastní vektory k $\lambda_1=4$.

Příklad 6. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

C

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}.$$

<u>Vlastní vektory k $\lambda_2 = 2+\sqrt{3}$.</u> Dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{3} & 1 \\ 4 & -17 & 8-2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ta má určitě nenulové řešení. Abychom si výpočet zjednodušili, hledejme řešení jen pomocí 1. a 2. rovnice

$$\begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Volme $x_2 = q$. Pak $x_3 = (2+\sqrt{3})q$ a $x_1 = q$. Vlastní vektory jsou $q(1, 2+\sqrt{3}, 1)$, $q \neq 0$.

Analogicky spočítáme, že vlastní vektory k vlastnímu číslu $\lambda_3 = 2-\sqrt{3}$ jsou $r(1, 2-\sqrt{3}, 1)$, $r \neq 0$.

Všimněte si, že vlastní vektory $(1,4,16)$, $(1,2+\sqrt{3},1)$, $(1,2-\sqrt{3},1)$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Příklad 7. Zjistěte, zda v $\mathbb{R}^3$ existuje báze tvořená vlastními vektory matice

A

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, najděte ji.

Prvně najdeme vlastní čísla

$$\det(C - \lambda E) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + 0\cdot 1\cdot 1$$
$$+ (-2)\cdot 1\cdot 0 - (-2)(2-\lambda)\cdot 1$$
$$- 0\cdot 1(3-\lambda) - (-\lambda)\cdot 1\cdot 0$$

$$= (\lambda-2)\lambda(3-\lambda) + 2(2-\lambda) = (\lambda-2)(\lambda(3-\lambda)-2) = (\lambda-2)(-\lambda^2+3\lambda-2)$$
$$= (\lambda-2)(2-\lambda)(\lambda-1) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Druhé vlastní číslo má algebraickou násobnost 2. Je totiž v rozkladu charakteristického polynomu jako $(\lambda-2)^2$.

Příklad 7. Zjistěte, zda v $\mathbb{R}^3$ existuje báze tvořená vlastními vektory matice

B

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, najděte ji.

Vlastní čísla k $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory jsou $p(-2,1,1)$, $p \neq 0$.

Vlastní čísla k $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení závisejí na dvou parametrech: $r(1,0,-1) + s(0,1,0)$.

Tedy báze $\mathbb{R}^3$ tvořená vlastními vektory existuje a je například: $(-2,1,1)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,0)$.

Příklad 7. Zjistěte, zda v $\mathbb{R}^3$ existuje báze tvořená vlastními vektory matice

C

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, najděte ji.

Vektory $r(1,0,-1) + s(0,1,0)$, $r, s \in \mathbb{R}$ tvoří vlastní podprostor vlastního čísla $\lambda_2 = 2$. Ten má dimenzi 2.

Říkáme, že $\lambda_2 = 2$ má geometrickou násobnost 2.

V tomto případě tedy
alg. násobnost λ_2 = geometr. násobnost λ_2.

Obecně to ale neplatí. Obecně platí pouze nerovnost alg. násobnost $\lambda \geq$ geom. násobnost λ.

Příklad 8. Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

(A)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nejprve najdeme charakteristický polynom:

$$\det(D-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & -2-\lambda \\ 0 & -1 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

k 2. řádku jsme přičetli 4.

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

Od 4. sloupce jsme odečetli 2.

Laplaceův rozvoj podle 2. řádku matice vlevo dává matici vpravo

Příklad 8. Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

B

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$= (-2-\lambda)\{(1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) + 2\cdot 0(-1) + 0\cdot 0(-1) - 0\cdot(-1-\lambda)(-\lambda)$$
$$- 2\cdot 0(2-\lambda) - (1-\lambda)\cdot 0(-1)\} = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$.

Vlastní vektory spočítáme stejně jako v předchozích příkladech, provedeme to pouze pro $\lambda_1 = 1$, u ostatních uvedeme výsledky:

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

součet 1. a 3. řádku

C

Příklad 8. Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektory jsou $p(1,-1,0,1)$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vlastní vektory k $\lambda_2 = 1$ jsou $q(-1,0,1,0)$, $q \neq 0$.

Vlastní vektory k $\lambda_3 = 2$ jsou $r(0,-1,0,1)$, $r \neq 0$.

Vlastní vektory k $\lambda_4 = -2$ jsou $s(-1,1,1,0)$, $s \neq 0$.

Všimněte si, že opět vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^4$ a tvoří bázi $\mathbb{R}^4$.