

Domácí úloha z MB141, týden 05

Odevzdejte přes odevzdáárnu své seminární skupiny do středy 25. 3. do 16 hodin.

Příklad 1. [4 body.] Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

$$(a) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 + 1 \\ x_2 - x_1 & 4x_1 \end{pmatrix},$$

$$(b) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 \\ x_2 - x_1 & 4x_1 \end{pmatrix},$$

$$(c) \varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(p) = p(1)^3 + p(2),$$

$$(d) \varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(p) = p(3) + 2p(1).$$

Příklad 2. [2 body.] Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^2 uvažujme bázi $u_1 = (2, 1)$, $u_2 = (1, 2)$. Necht' $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = (4, 10, 16), \varphi(u_2) = (5, 11, 17).$$

Najděte matici A tvaru 3×2 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Příklad 3. [3 body.] Necht' φ je lineární zobrazení \mathbb{R}^3 do sebe, které je symetrií podle přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $u_1 = (1, -2, 1)$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$. (Podobný příklad byl řešen ve slajdech k 5. přednášce.)

Příklad 4. [3 body.] Najděte vlastní čísla a báze vlastních podprostorů lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaného maticí

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. [3 body.] Najděte vlastní čísla a báze vlastních podprostorů lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ zadaného maticí

$$D = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$