MB141 – 6. cvičení
Skalární součin

Martin Čadek

Jarní semestr 2020

4

Příklad 1. Najděte ortonormální bázi podrostoru $S = [(1,2,-1,3,1),\ (5,2,-1,7,1),\ (2,-1,2,-4,-2)] \subset \mathbb{R}^5$. jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem.

Standardní skalární součin na $\mathbb{R}^5$ je

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 .$$

K vektorům $v_1 = (1,2,-1,3,1)$, $v_2 = (5,2,-1,7,1)$ a $v_3 = (2,-1,2,-4,-2)$ najdeme navzájem kolmé vektory u_1, u_2, u_3 takové, že

$$S = [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3].$$

První

$$u_1 = v_1 = (1,2,-1,3,1).$$

Druhý vektor u_2 hledáme ve tvaru

$$u_2 = v_2 - a u_1$$

Musí být

$$\langle u_2, u_1 \rangle = \langle v_2, u_1 \rangle - a \langle u_1, u_1 \rangle = 0$$

$$a = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{32}{16} = 2$$

(B)

Příklad 1. Najděte ortonormální bázi podrostoru $S = [(1,2,-1,3,1),\ (5,2,-1,7,1),\ (2,-1,2,-4,-2)] \subset \mathbb{R}^5$. jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem.

$$u_2 = v_2 - 2u_1 = (3,-2,1,1,-1).$$

u_3 hledáme ve tvaru

$$u_3 = v_3 - b u_2 - c u_1$$

Musí být

$$0 = \langle u_3, u_1 \rangle = \langle v_3, u_1 \rangle - b \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0} - c \langle u_1, u_1 \rangle$$

$$= \langle v_3, u_1 \rangle - c \langle u_1, u_1 \rangle$$

$$c = \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{-16}{16} = -1$$

Dále

$$0 = \langle u_3, u_2 \rangle = \langle v_3, u_2 \rangle - b \langle u_2, u_2 \rangle - c \underbrace{\langle u_1, u_2 \rangle}_{=0}$$

$$= \langle v_3, u_2 \rangle - b \langle u_2, u_2 \rangle$$

$$b = \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

C

Příklad 1. Najděte ortonormální bázi podrostoru
$S = [(1,2,-1,3,1),\ (5,2,-1,7,1),\ (2,-1,2,-4,-2)] \subset \mathbb{R}^5$.
jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem.

Proto $\quad u_3 = v_3 - \frac{1}{2} u_2 + u_3 = \frac{1}{2}(3,4,1,-3,-1)$.

Za ortonormální bázi podprostoru S nyní vezmeme vektory
$$\frac{u_1}{\|u_1\|},\ \frac{u_2}{\|u_2\|},\ \frac{u_3}{\|u_3\|},$$
neboť $\left\| \frac{u_i}{\|u_i\|} \right\| = \frac{\|u_i\|}{\|u_i\|} = 1.$

Jsou to vektory
$$\frac{1}{4}(1,2,-1,3,1),\ \frac{1}{4}(3,-2,1,1,-1),\ \frac{1}{6}(3,4,1,-3,-1)$$
neboť $\|u_1\| = 4$, $\|u_2\| = 4$, $\|u_3\| = 3$.

Příklad 2. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální doplněk podprostoru
$M = [(1,2,-1,-3,3),\ (1,-2,3,1,-1)]$.

Ⓐ

Definice ortogonálního doplňku říká, že

$$M^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^5 \mid \forall v \in M : \langle x, v \rangle = 0 \}$$

Splnění podmínky $\langle x, v\rangle = 0$ stačí požadovat jen po vektorech báze podprostoru M, tedy po vektorech $v_1 = (1,2,-1,-3,3)$, $v_2 = (1,-2,3,1,-1)$. Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\langle x, v_1 \rangle = x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0$$
$$\langle x, v_2 \rangle = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

Řešíme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální doplněk podprostoru
$M = [(1,2,-1,-3,3),\ (1,-2,3,1,-1)]$.

B

Řešení je

$$M^\perp = \{(-p+q-s,\ -p+q+s,\ s,\ q,\ p) \in \mathbb{R}^5 \mid p,q,s \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{p(-1,-1,0,0,1) + q(1,1,0,1,0) + s(-1,1,1,0,0) \in \mathbb{R}^5 \mid p,q,s \in \mathbb{R}\} = [(-1,-1,0,0,1),(1,1,0,1,0),(-1,1,1,0,0)]$$

Tedy ortogonální doplněk $M^\perp$ je lineární obal vektorů $(-1,-1,0,0,1)$, $(1,1,0,1,0)$, $(-1,1,1,0,0)$.

A

Příklad 3. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2, 11, -3, -4, 7)$ do podprostoru M a jeho ortogonálního doplňku $M^{\perp}$ z předchozího příkladu.

Kolmou projekci vektoru u do podprostoru M označme Pu. Hledáme ji ve tvaru

$$Pu = av_1 + bv_2,$$

kde $M = [v_1 = (1,2,-1,-3,3),\ v_2 = (1,-2,3,1,-1)]$, a musí pro ni platit

$$u - Pu \perp M \qquad (u - Pu \in M^{\perp})$$

Tato podmínka znamená, že

$$\langle u - Pu, v_1 \rangle = \langle u - (av_1 + bv_2), v_1 \rangle = 0$$

$$\langle u - Pu, v_2 \rangle = \langle u - (av_1 + bv_2), v_2 \rangle = 0$$

Dostaneme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $\underline{a}$ a $\underline{b}$:

B

Příklad 3. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2, 11, -3, -4, 7)$ do podprostoru M a jeho ortogonálního doplňku $M^\perp$ z předchozího příkladu.

$$a\langle v_1, v_1\rangle + b\langle v_2, v_1\rangle = \langle u, v_1\rangle$$
$$a\langle v_1, v_2\rangle + b\langle v_2, v_2\rangle = \langle u, v_2\rangle$$

Číselně

$$24a - 12b = 60$$
$$-12a + 16b = -40.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 24 & -12 & 60 \\ -12 & 16 & 40 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

součet 1. a 2. řádku

Tedy $b = -1$, $a = 2$. Kolmá projekce vektoru $\underline{u}$ do podprostoru M je

$$Pu = 2(1, 2, -1, -3, 3) - (1, -2, 3, 1, -1)$$
$$= (1, 6, -5, -7, 7).$$

C

Příklad 3. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2, 11, -3, -4, 7)$ do podprostoru M a jeho ortogonálního doplňku $M^{\perp}$ z předchozího příkladu.

Kolmou projekci Qu vektoru u do $M^{\perp}$ spočteme takto:

$$Qu = u - Pu = (2, 11, -3, -4, 7) - (1, 6, -5, -7, 7)$$
$$= (1, 5, 2, 3, 0).$$

Příklad 4. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. A

jestliže $\varphi(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pak

$\varphi(e_1) = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ = 1. sloupec matice A

$\varphi(e_2) = \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ = 2. sloupec matice A

$\varphi(e_3) = \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ = 3. sloupec matice A

K nalezení matice A nám tedy postačí najít hodnoty kolmé projekce φ na vektorech e_1, e_2, e_3.

Příklad 4. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

B

Najdeme obrazy tří vektorů vhodné báze při kolmé projekci. Pro vektory $u = (1,2,0)$, $v = (1,0,-1)$, které v rovině leží, platí

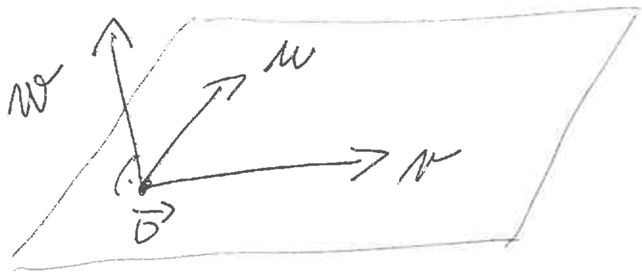
$$\varphi(u) = u \quad , \quad \varphi(v) = v.$$

Pro vektor $w = (2,-1,2)$, který je k rovině kolmý, dostaneme

$$\varphi(w) = (0,0,0).$$

Z těchto údajů spočítáme $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$.

Napišme vektory u, v, w do řádků matice a za nimi vektory $\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)$.



Příklad 4. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

C

$$\left(\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \\ v & \varphi(v) \\ w & \varphi(w) \end{array}\right) \sim \text{posadíme element. řádkové operace} \sim \left(\begin{array}{c|c} e_1 & \varphi(e_1) \\ e_2 & \varphi(e_2) \\ e_3 & \varphi(e_3) \end{array}\right)$$

Počítáme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & -9 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & -36 & 18 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Tedy $\varphi(9e_1) = (5, 2, -4)$, $\varphi(9e_2) = (2, 8, 2)$, $\varphi(9e_3) = (-4, 2, 5)$.
Proto $\varphi(e_1) = \frac{1}{9}(5, 2, -4)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{9}(2, 8, 2)$, $\varphi(e_3) = \frac{1}{9}(-4, 2, 5)$
jsou sloupce matice.

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A

Matice B je ortogonální, neboť její řádky mají jednotkovou velikost a par k sobě navzájem kolmé.

$$\det B = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3^3} \det \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\left(-4-4-4-(8+8-1)\right) = \frac{-27}{27} = -1.$$

Matice B má tedy vlastní čísla -1. Hledáme vlastní vektor k němu. $(B+E)v = 0$.

B

Příklad 5. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}+1 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení je $v = p(2,1,-1)$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vezmeme nějaký kolmý vektor k v, např. $u = (0,1,1)$. $Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u$.

Tedy B reprezentuje podle teorie složení symetrie podle roviny kolmé k vektoru $v = (2,1,-1)$ a otočení kolem osy se směrovým vektorem v.

Příklad 5. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje C

zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Otočení ale přeřadí u na v, tedy je to otočení o úhel 0, tedy identické zobrazení. Proto je $\varphi(x) = Bx$ pouze symetrií podle roviny procházející počátkem a kolmé k vektoru $v = (2,1,-1)$. Tato rovina má rovnici

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

A

Příklad 6. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Postupujeme stejně jako u předchozí úlohy.
Prvně zjistíme, že C je ortogonální matice.
Spočteme $\det C = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^3} \det \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{8}\left(2 + 2 - (-2-2)\right) = \frac{8}{8} = 1.$

Podle teorie z přednášky je φ otočení kolem přímky procházející počátkem, jejíž směrový vektor je vlastní vektor ke vlastnímu

Příklad 6. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje B

zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

číslu 1. Spočteme jej z rovnice $(C-E)v = 0$.

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}-1 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení jsou násobky vektoru $v = (0,1,1)$.

Abychom zjistili úhel otáčení, vezmeme si

Příklad 6. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

C

vektor $u \perp v$, např. $u = (1,0,0)^T$. Platí $\varphi(u) = Cu = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$. Úhel, který svírají vektory u a Cu je α, kde

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, Cu\rangle}{\|u\|\,\|Cu\|} = \frac{0}{1\cdot 1} = 0$$

Tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Zobrazení je rotace kolem přímky se směrovým vektorem $(0,1,1)$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ (ve směru od $(1,0,0)$ k $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.