MB141 – 8. cvičení
Eukleidovská geometrie

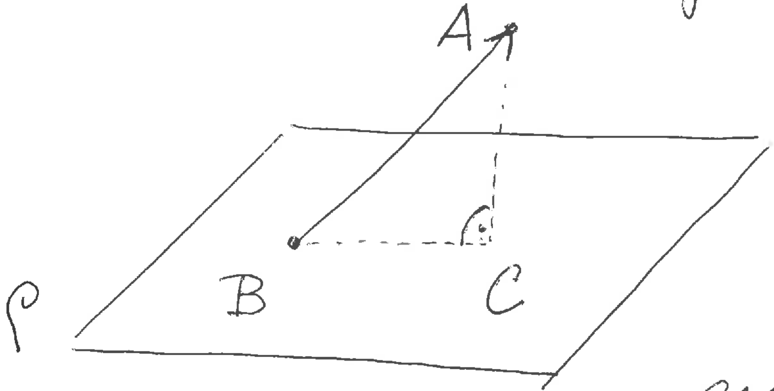
Martin Čadek

Jarní semestr 2020

A

Příklad 1. V $\mathcal{E}_3$ spočítejte vzdálenost bodu $A = [3,5,7]$ od roviny $\rho: \ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4 = 0$. Současně najděte bod $C \in \rho$ takový, že $\operatorname{dist}(A, C) = \operatorname{dist}(A, \rho)$.

Nejdříve si zvolíme v rovině ρ nějaký bod, například $B = [0,0,2]$. Zaměření roviny je dána rovnicí $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$. K ní kolmý vektor (normálový vektor) je $\vec{n} = (1,3,-2)$.



Vzdálenost bodu A od roviny ρ je dána velikostí kolmé projekce vektoru $\overrightarrow{BA}$ do ortogonálního doplňku k zaměření roviny ρ. $Z(\rho)^{\perp} = [\vec{n}]$. $\overrightarrow{BA} = (3,5,5)$

Kolmá projekce $\overrightarrow{BA}$ do $Z(\rho)^{\perp}$ je násobek vektoru

(B)

Příklad 1. V $\mathcal{E}_3$ spočítejte vzdálenost bodu $A = [3, 5, 7]$ od roviny $\rho :\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4 = 0$. Současně najděte bod $C \in \rho$ takový, že $\operatorname{dist}(A, C) = \operatorname{dist}(A, \rho)$.

$\vec{n}$. $\quad P_{Z(\rho)^\perp}(\overrightarrow{BA}) = a\vec{n} = a(1, 3, -2)$. Platí

$$\langle \overrightarrow{BA} - a\vec{n}, \vec{n} \rangle = 0$$

$$a = \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} = \frac{\langle (3,5,5), (1,3,-2) \rangle}{\langle (1,3,-2), (1,3,-2) \rangle} = \frac{3 + 15 - 10}{1 + 9 + 4} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Proto $P_{Z(\rho)^\perp}(\overrightarrow{BA}) = \frac{4}{7}(1, 3, -2)$ a vzdálenost

$$\operatorname{dist}(A, \rho) = \left\| \frac{4}{7}(1, 3, -2) \right\| = \frac{4}{7}\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \frac{4}{7}\sqrt{14}$$

Bod $C \in \rho$, ve kterém se vzdálenost realizuje spočítáme takto – viz obrázek: Vektor $P_{Z(\rho)^\perp}(\overrightarrow{BA})$ vede od C k A. $\quad A - C = P_{Z(\rho)^\perp}(\overrightarrow{BA})$. Proto

$$C = A - P_{Z(\rho)^\perp}(\overrightarrow{BA}) = [3, 5, 7] - \frac{4}{7}(1, 3, -2) = \frac{1}{7}[17, 23, 57].$$

Příklad 2. V $\mathcal{E}_3$ spočítejte vzdálenost přímek

$$p: \ [4,4,4] + a(2,1,-1) \quad \text{a} \quad q: \ [1,15,12] + b(1,-2,1).$$

Dále najděte body $K \in p$ a $L \in q$, v nichž se vzdálenost přímek realizuje, tj. platí $\operatorname{dist}(K,L) = \operatorname{dist}(p,q)$.

(A)

Pišme $p: A + au$, $A = [4,4,4]$, $u = (2,1,-1)$,
$q: B + bv$, $B = [1,15,12]$, $v = (1,-2,1)$.

Vektor $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3,11,8)$. Ortogonální doplněk k součtu zaměření je $(Z(p)+Z(q))^\perp = [n]$, kde $\langle n,u\rangle = \langle n,v\rangle = 0$. To vede na soustavu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Řešením pak násobky vektoru $n = (1,3,5)$.

Vzdálenost přímek je velikost kolmé projekce vektoru $\overrightarrow{AB}$ do $[\vec{n}]$. Označme ji $P(\overrightarrow{AB}) = a \cdot n$

$$a = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, n\rangle}{\langle n,n\rangle} = \frac{\langle(-3,11,8),(1,3,5)\rangle}{\langle(1,3,5),(1,3,5)\rangle} = \frac{70}{35} = 2$$

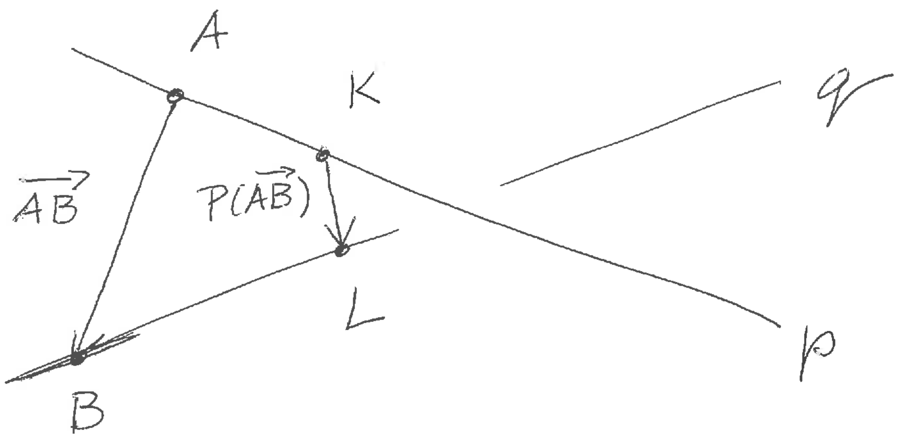
Příklad 2. V $\mathcal{E}_3$ spočítejte vzdálenost přímek B

$$p:\ [4,4,4]+a(2,1,-1) \quad \text{a} \quad q:\ [1,15,12]+b(1,-2,1).$$

Dále najděte body $K \in p$ a $L \in q$, v nichž se vzdálenost přímek realizuje, tj. platí $\operatorname{dist}(K,L) = \operatorname{dist}(p,q)$.

Vzdálenost přímek p a q je $\operatorname{dist}(p,q) = \| 2(1,3,5) \|$

$= 2 \cdot \sqrt{35}$



Pro body, v nichž se vzdálenost realizuje, platí

$$K + P(\overrightarrow{AB}) = L$$

$$A + au + P(\overrightarrow{AB}) = B + bv$$

$$au - bv = (B-A) - P(\overrightarrow{AB})$$

To vede na soustavu tří rovnic o neznámých a, b, která má matici:

$$\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \end{array}\right) & \\ \;\; a \quad\;\; b & \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení je $b = 3,\ a = -1.$

C

Příklad 2. V $\mathcal{E}_3$ spočítejte vzdálenost přímek

$$p: \ [4,4,4] + a(2,1,-1) \quad \text{a} \quad q: \ [1,15,12] + b(1,-2,1).$$

Dále najděte body $K \in p$ a $L \in q$, v nichž se vzdálenost přímek realizuje, tj. platí $\operatorname{dist}(K,L) = \operatorname{dist}(p,q)$.

Bod $K = A + (-1)u = [4,4,4] - (2,1,-1) = [2,3,5]$

$L = B + 3v = [1,15,12] + 3(1,-2,1) = [4,9,15]$

Provedeme zkoušku: přesvědčíme se, že

$$K + P(\overrightarrow{AB}) = L.$$

Přímka $\overleftrightarrow{KL}$ je osou mimoběžek p a q.

Výpočet vzdálenosti dvou mimoběžek je tedy vlastně totéž, co hledání jejich osy, což jsme dělali v minulém cvičení.

Příklad 3. V $\mathcal{E}_4$ určete vzdálenost přímky p od roviny ρ

A

$$p : [5,4,4,5] + r(0,0,1,-4),$$
$$\rho : [4,1,1,0] + s(1,-1,0,0) + t(2,0,-1,0).$$

a body $M \in p$ a $N \in \rho$, v nichž se tato vzdálenost realizuje, tj. $\operatorname{dist}(M,N) = \operatorname{dist}(p,\rho)$.

Označme $A = [5,4,4,5]$, $u = (0,0,1,-4)$. $p: A + ru$.

Dále $B = [4,1,1,0]$, $v_1 = (1,-1,0,0)$, $v_2 = (2,0,-1,0)$

$\rho: B + sv_1 + sv_2$. Platí $Z(p) + Z(q) = [u, v_1, v_2]$.

Najdeme ortogonální doplněk $(Z(p)+Z(q))^{\perp} = \{x \in R^4 \mid \langle x, u\rangle = \langle x, v_1\rangle = \langle x, v_2\rangle = 0\}$ Pro souřadnice (x_1, x_2, x_3, x_4) vektoru x dostaneme homogenní soustavu 3 rovnic o 4 neznámých s maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Řešení jsou násobky vektoru $x = (2,2,4,1)$.

(B)

Příklad 3. V $\mathcal{E}_4$ určete vzdálenost přímky p od roviny ρ

$$p : [5,4,4,5] + r(0,0,1,-4),$$
$$\rho : [4,1,1,0] + s(1,-1,0,0) + t(2,0,-1,0).$$

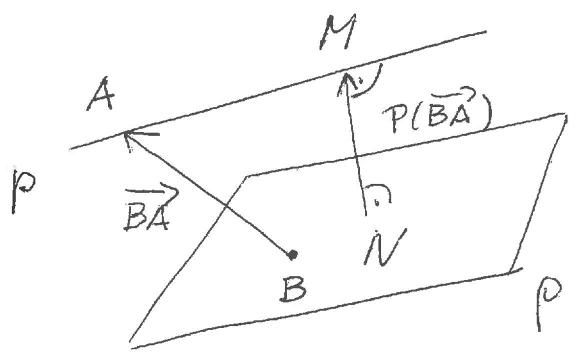
a body $M \in p$ a $N \in \rho$, v nichž se tato vzdálenost realizuje, tj. $\operatorname{dist}(M,N) = \operatorname{dist}(p,\rho)$.

Spočítáme kolmou projekci $P(\overrightarrow{BA})$ vektoru $\overrightarrow{BA}$ do $(Z(p)+Z(q))^{\perp} = [X]$. $P(\overrightarrow{BA}) = a \cdot X = a(2,2,4,1)$

$$a = \frac{\langle \overrightarrow{BA}, X \rangle}{\langle X, X \rangle} = \frac{25}{25} = 1$$

Tedy $P(\overrightarrow{BA}) = (2,2,4,1)$ a vzdálenost

$\operatorname{dist}(p,\rho) = \| P(\overrightarrow{BA}) \| = \| (2,2,4,1) \| = \sqrt{2^2+2^2+4^2+1^2} = 5$



Body $M \in p$ a $N \in \rho$ realizující vzdálenost splňují

$$N + P(\overrightarrow{BA}) = M$$
$$B + s v_1 + t v_2 + P(\overrightarrow{BA}) = A + r u$$
$$s v_1 + t v_2 - r u = (A-B) - P(\overrightarrow{BA})$$

Příklad 3. V $\mathcal{E}_4$ určete vzdálenost přímky p od roviny ρ

$$p : [5, 4, 4, 5] + r(0, 0, 1, -4),$$
$$\rho : [4, 1, 1, 0] + s(1, -1, 0, 0) + t(2, 0, -1, 0).$$

a body $M \in p$ a $N \in \rho$, v nichž se tato vzdálenost realizuje, tj. $\mathrm{dist}(M, N) = \mathrm{dist}(p, \rho)$.

C

Dostáváme soustavu 4 rovnic o neznámých s, t, r

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{ccc} s & t & r \end{array}$$

Řešení najdeme z posledních tří rovnic $r = 1$, $t = 0$, $s = -1$, a přesvědčíme se, že i 1. rovnice je splněna.

Proto $M = A + 1 \cdot (0, 0, 1, -4) = [5, 4, 5, 1]$.

$N = B + 0 \cdot v_1 + (-1) v_2 = [3, 2, 1, 0]$.

A

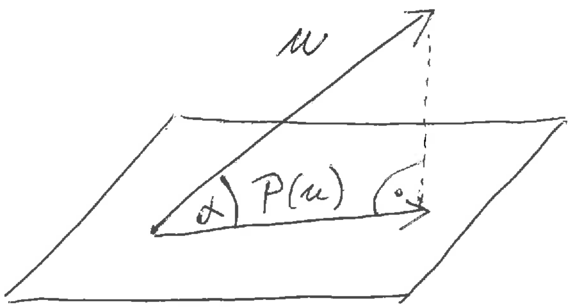
Příklad 4. V $\mathcal{E}_3$ určete odchylku roviny ρ od přímky p:
$\rho: [1,3,5]+a(1,1,1)+b(1,3,2), \quad p: [-3,1,7]+c(1,0,-1).$

Při počítání odchylek afinních podprostorů záleží tato pouze na jejich zaměření:

$Z(\rho): \quad a(1,1,1)+b(1,3,2)$

$Z(p): \quad c(1,0,-1)$

Odchylka přímky a roviny je úhel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, který svírá vektor $u=(1,0,-1)$ se svým kolmým průmětem $P(u)$ do $Z(\rho)$.
$$\cos\alpha = \frac{\|P(u)\|}{\|u\|}$$



Spočítáme $P(u) = a(1,1,1)+b(1,3,2)$

Platí $u - \big(a(1,1,1)+b(1,3,2)\big) \perp (1,1,1)$
$\perp (1,3,2)$

To nám dá soustavu rovnic pro neznámé a, b:

B

Příklad 4. V $\mathcal{E}_3$ určete odchylku roviny ρ od přímky p:
$\rho: [1,3,5] + a(1,1,1) + b(1,3,2), \quad p: [-3,1,7] + c(1,0,-1).$

$$a\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle + b\langle (1,3,2),(1,1,1)\rangle = \langle (1,0,-1),(1,1,1)\rangle$$
$$a\langle (1,1,1),(1,3,2)\rangle + b\langle (1,3,2),(1,3,2)\rangle = \langle (1,0,-1),(1,3,2)\rangle$$

matice soustavy je

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 14 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} a & b \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$a = 1, \ b = -\frac{1}{2}$.

Projekce je

$$P(u) = (1,1,1) - \frac{1}{2}(1,3,2) = \frac{1}{2}(1,-1,0)$$

Tedy
$$\cos\alpha = \frac{\|P(u)\|}{\|u\|} = \frac{\|\frac{1}{2}(1,-1,0)\|}{\|(1,0,-1)\|} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

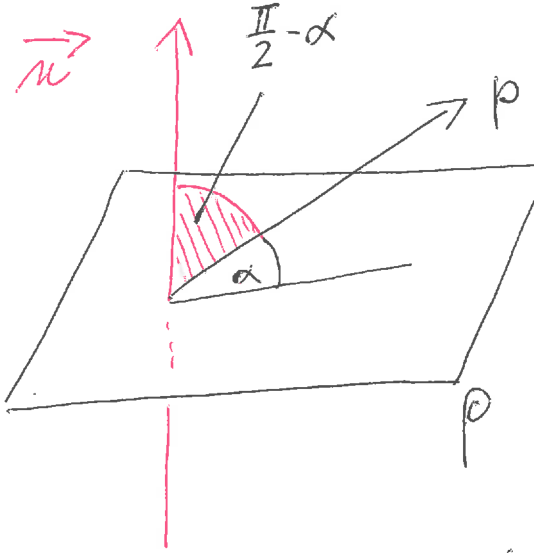
Jiný postup:

Odchylku můžeme spočítat i jinak: Je-li $\vec{n}$ kolmý vektor k rovině ρ, tj. $[\vec{n}] = Z(\rho)^{\perp}$, pak

$$\underbrace{\alpha(p,\rho)}_{\text{odchylka } p \text{ a } \rho} = \frac{\pi}{2} - \underbrace{\alpha(p,[\vec{n}])}_{\text{odchylka přímek } p \text{ a } [\vec{n}]}$$

C

Příklad 4. V $\mathcal{E}_3$ určete odchylku roviny ρ od přímky p:
$\rho: \ [1,3,5]+a(1,1,1)+b(1,3,2), \quad p: \ [-3,1,7]+c(1,0,-1).$



$n \perp (1,1,1)$, $n \perp (1,3,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešením jsou násobky vektoru $(1, 1, -2)$

Odchylka $\angle(p)$ a $[\vec{n}]$ je

$$\cos(\alpha(p,[\vec{n}])) = \frac{|\langle (1,1,-2),(1,0,-1)\rangle|}{\|(1,1,-2)\| \, \|(1,0,-1)\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}}$$

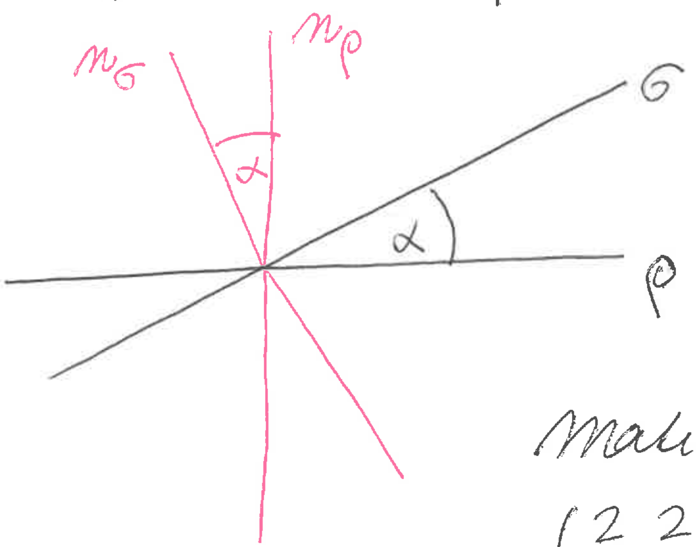
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{Proto } \alpha(p,[\vec{n}]) = \frac{\pi}{6}.$$

Dále $\alpha(\rho,p) = \frac{\pi}{2} - \alpha(p,[\vec{n}]) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$

Ⓐ

Příklad 5. V $\mathcal{E}_3$ určete odchylku rovin ρ a σ:
$\rho: \ [2,3,4] + a(2,2,1) + b(3,3,-2), \quad \sigma: \ x_1 - 2x_2 + x_2 = 4.$

Odchylka rovin ρ a σ je rovna odchylce jejich normálových přímek (kolmé přímky). Obrázek je řezem, který je namalován v rovině kolmé k průniku $\rho \cap \sigma$ (což je přímka).



Normálový vektor k rovině σ je $y = (1,-2,1)$

Normálový vektor k rovině ρ je x

$\langle x, (2,2,1)\rangle = 0, \ \langle x, (3,3,-2)\rangle = 0.$

Matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= -p \\ x_1 &= p \end{aligned}$$

$x = (1,-1,0)$

B

Příklad 5. V $\mathcal{E}_3$ určete odchylku rovin ρ a σ:
$\rho: \; [2,3,4] + a(2,2,1) + b(3,3,-2), \quad \sigma: \; x_1 - 2x_2 + x_2 = 4.$

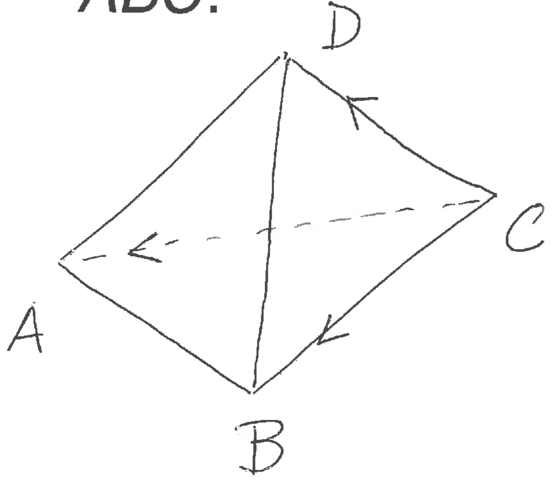
Odchylka α je tedy úhel v intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ takový, že

$$\cos\alpha = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tedy $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $(30°)$.

A

Příklad 6. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, kde $A = [1, 2, 3]$, $B = [4, 7, 8]$, $C = [-1, -2, 3]$, $D = [3, 0, 1]$. Určete objem čtyřstěnu, obsah trojúhelníka ABC a velikost výšky na stěnu ABC.



Vezmeme vektory

$$\overrightarrow{CA} = (2, 4, 0) = u$$

$$\overrightarrow{CB} = (5, 9, 5) = v$$

$$\overrightarrow{CD} = (4, 2, -2) = w$$

Orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného vrcholem C

$P(C, u, v, w)$

a vektory u, v, w je determinant matice, jejíž sloupce jsou souřadnice vektorů u, v, w:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 9 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 80 - 0 + 40 - 20 = 64$$

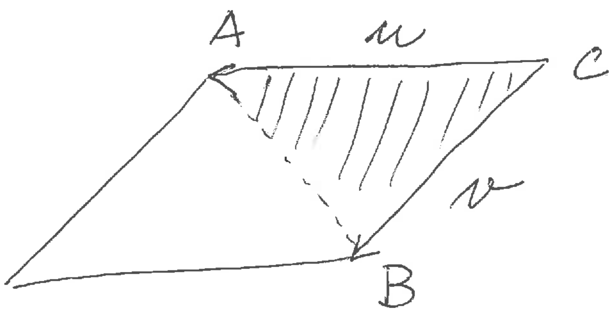
B

Příklad 6. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, kde $A = [1,2,3]$, $B = [4,7,8]$, $C = [-1,-2,3]$, $D = [3,0,1]$. Určete objem čtyřstěnu, obsah trojúhelníka ABC a velikost výšky na stěnu ABC.

Objem rovnoběžnostěnu je tedy $|64| = 64$ a objem čtyřstěnu ABCD je

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\, 64 = \frac{32}{3}.$$

Obsah $\triangle ABC$ je roven $\frac{1}{2}$ velikosti obsahu rovnoběžníku určeného vektory $u = \overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{CB} = v$. Obsah tohoto rovnoběžníku je velikost vekt. součinu



$$S_{(u,v)} = \| u \times v \|$$

$u \times v = x = (x_1, x_2, x_3)$, kde

$$x_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20, \quad x_2 = - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10,$$

C

Příklad 6. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, kde $A = [1, 2, 3]$, $B = [4, 7, 8]$, $C = [-1, -2, 3]$, $D = [3, 0, 1]$. Určete objem čtyřstěnu, obsah trojúhelníka ABC a velikost výšky na stěnu ABC.

$$x_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -2 \qquad \text{Tedy } u \times v = (20, -10, -2)$$

Obsah $\triangle ABC$ je $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|u \times v\| = \frac{1}{2}\sqrt{504} \doteq 11{,}22$

Výšku na stěnu ABC spočítáme pomocí vzorce

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot v$$

$$v = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{32}{\frac{1}{2}\sqrt{504}} = \frac{64}{\sqrt{504}} \approx 2{,}85$$

Výšku bychom mohli spočítat i jako vzdálenost bodu D od roviny ABC.

A

Příklad 7. Zjistěte, které stěny čtyřstěnu *ABCD* z předchozí úlohy jsou vidět z bodu bodu $X = [-10, 100, -50]$.

Připomeneme $A = [1,2,3]$, $B = [4,7,8]$, $C = [-1,-2,3]$, $D = [3,0,1]$.

Prvně zjistíme, zda X leží na stejné straně roviny ABC jako bod D. To bude pravda, pokud determinanty

$$\left| \overrightarrow{CA}\ \overrightarrow{CB}\ \overrightarrow{CD} \right| \quad a \quad \left| \overrightarrow{CA}\ \overrightarrow{CB}\ \overrightarrow{CX} \right|$$ mají stejné znaménko.

$$\overrightarrow{CA} = (2,4,0) \qquad \overrightarrow{CD} = (4,2,-2)$$

$$\overrightarrow{CB} = (5,9,5) \qquad \overrightarrow{CX} = (-9,102,-53)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 9 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 80 - 0 + 40 - 20 = 64 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -9 \\ 4 & 9 & 102 \\ 0 & 5 & -53 \end{vmatrix} = -18 \cdot 53 + 0 - 180 - 0 + 20 \cdot 53 - 10 \cdot 102 < 0$$

Rovina ABC odděluje body D a X. Bod X tedy leží vně čtyřstěnu $ABCD$ a je z něho vidět stěna ABC.

B

Příklad 7. Zjistěte, které stěny čtyřstěnu $ABCD$ z předchozí úlohy jsou vidět z bodu bodu $X = [-10, 100, -50]$.

Zjistíme viditelnost stěny ABD. Potřebujeme vektory.

$\overrightarrow{AB} = (3, 5, 5)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (-2, -4, 0)$

$\overrightarrow{AD} = (2, -2, -2)$ $\quad \overrightarrow{AX} = (-11, 98, -53)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 40 + 20 - 20 - 0 - 24 = -64 < 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -11 \\ 5 & -2 & 98 \\ 5 & -2 & -53 \end{vmatrix} = 6\cdot 53 + 10\cdot 98 + 110 - 110 + 10\cdot 53 + 6\cdot 98 > 0$$

Rovina ABD odděluje body C a X. Tedy z bodu X je vidět stěna ABD.

C

Příklad 7. Zjistěte, které stěny čtyřstěnu *ABCD* z předchozí úlohy jsou vidět z bodu bodu $X = [-10, 100, -50]$.

Zjistíme viditelnost stěny ACD. Potřebujeme vektory

$\overrightarrow{AC} = (-2, -4, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = (3, 5, 5)$

$\overrightarrow{AD} = (2, -2, -2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AX} = (-11, 98, -53)$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \text{podle předchozího} = +64 > 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -11 \\ -4 & -2 & 98 \\ 0 & -2 & -53 \end{vmatrix} = -4 \cdot 53 + 0 - 88 - 0 - 8 \cdot 53 - 4 \cdot 98 < 0$$

Stěnu ACD je z bodu X rovněž vidět.

Zjistili jsme, že z bodu X jsou vidět stěny AB, AC, AD.

Tedy X a A leží na stejné straně roviny BCD.

To znamená, že stěna BCD z X vidět není.

Přesvědčte se o tom výpočtem!

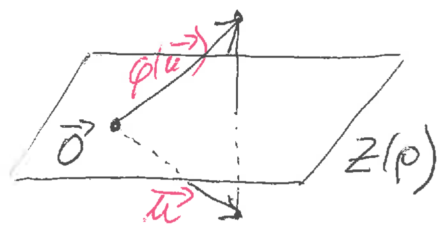
A

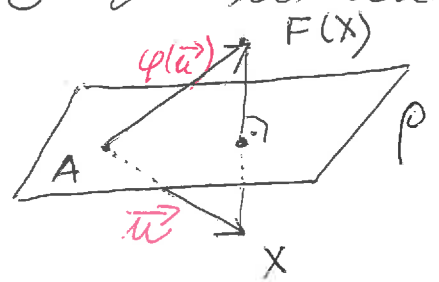
Příklad 8. V souřadnicích standardní souřadné soustavy v $\mathcal{E}_3$ napište předpis zobrazení, které je symetrií podle roviny $\rho: \; 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5 = 0$.

Najdeme nějaký bod ležící v rovině ρ, např. $A=[0,0,5]$. Označme symetrii podle roviny ρ písmenem F. Platí $F(A) = A$. Nechť $X \in \mathcal{E}_3$ je libovolný bod. Můžeme to zapsat $X = A + u$. Platí, že

$$F(X) = F(A+u) = F(A) + \varphi(u) = A + \varphi(u),$$

kde $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, které je symetrií podle roviny $Z(\rho): 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$, procházející počátkem. Zobrazení φ již umíme hledat – viz. cvičení 5 o lineárních zobrazeních.





B

Příklad 8. V souřadnicích standardní souřadné soustavy v $\mathcal{E}_3$ napište předpis zobrazení, které je symetrií podle roviny $\rho: 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5 = 0$.

Zobrazení φ zobrazuje vektor $(2,-3,1)$, který je kolmý ke $Z(\rho)$, na vektor $(-2,3,-1)$ a vektory $(0,1,3)$ a $(-1,0,2)$ ležící v $Z(\rho)$ na sebe. Chceme najít matici zobrazení φ_z tak, aby $\varphi\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Sloupce matice A jsou $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$. Hledáme je

$$\begin{array}{cc} u & \varphi(u) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 & -4 & 6 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & -14 & 7 & 0 & -14 \\ 0 & 7 & 21 & 0 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & 0 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$\varphi(e_1) = (3,6,-2)$

$\varphi(e_2) = (6,-2,3)$

$\varphi(e_3) = (-2,3,6)$

C

Příklad 8. V souřadnicích standardní souřadné soustavy v $\mathcal{E}_3$ napište předpis zobrazení, které je symetrií podle roviny $\rho:\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5 = 0$.

Proto $\varphi\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Potom pro $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ je

$$F(X) = A + \varphi(X - A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{7}(3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 10) \\ \frac{1}{7}(6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 15) \\ \frac{1}{7}(-2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 30 + 35) \end{bmatrix}$$