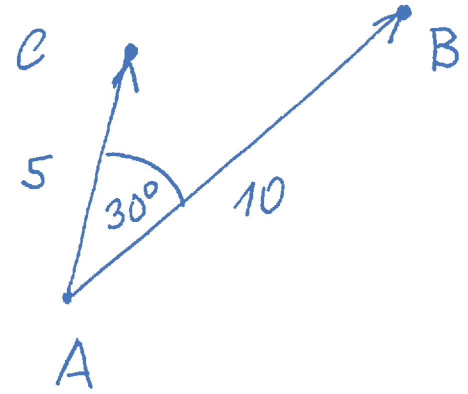
Jméno:

0. minipísemka, skupina A, MB141, jaro 2020

Opravené zadání

O trojúhelníku ABC víme, že $A = [1, 2]$, $B = [7, 10]$, bod C leží vlevo od od polopřímky $\overrightarrow{AB}$, úhel $\angle BAC = 30^o$ a velikost úsečky AC je polovinou velikosti úsečky AB. Pomocí otočení a stejnolehlosti najděte souřadnice bodu C.

Řešení



Bod C leží na přímce vycházející z bodu A se směrovým vektorem, který vznikne otočením vektoru $\overrightarrow{AB} = (6,8)$ o úhel 30°.

Vektor $\overrightarrow{AC}$ spočítáme takto:

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \overrightarrow{AB} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2 \\ \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$C = A + \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2 \\ \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{7}{2} + 2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

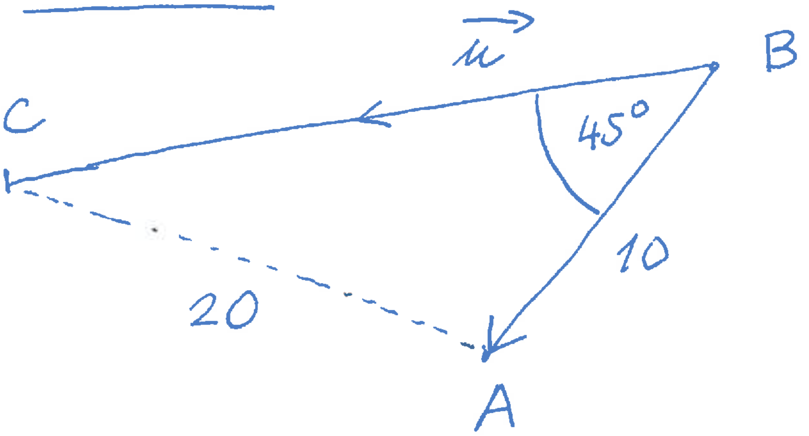
Souřadnice bodu C jsou $[-1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{7}{2} + 2\sqrt{3}]$.

Jméno:

1. minipísemka, skupina B, MB141, jaro 2020
Původní zadání

O trojúhelníku ABC víme, že $A = [3, 1]$, $B = [9, 9]$, bod C leží vlevo od od polopřímky $\overrightarrow{AB}$, úhel $\angle ABC = 45^o$ a velikost úsečky AC je dvojnásobkem velikosti úsečky AB. Pomocí otočení a stejnolehlosti najděte souřadnice bodu C.

Řešení



Bod C leží na polopřímce určené bodem B a vektorem $\vec{u}$, který je kladným násobkem vektoru vzniklého otočením vektoru $\overrightarrow{BA}$ o úhel 45° ve směru hodinových ručiček (tj. −45° proti směru hodinových ručiček). Otočením vektoru $\overrightarrow{BA}$ dostaneme vektor

$$\begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Vezmeme $\vec{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$C = B + t\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t > 0$. Parametr t určíme z podmínky $\|AC\| = 2\|AB\| = 20$.

Tedy $\|AC\|^2 = 400$

$$\left\| B + t\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} - A \right\|^2 = 400$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 9-7t \\ 9-t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2 = 400$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 6-7t \\ 8-t \end{pmatrix} \right\|^2 = 400$$

$$(6-7t)^2 + (8-t)^2 = 400$$

$$36 - 84t + 49t^2 + 64 - 16t + t^2 = 400$$

$$50t^2 - 100t - 300 = 0$$

$$t^2 - 2t - 6 = 0$$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 6}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}$$

Kladné řešení je

$$t = 1 + \sqrt{7}$$

Bod C má tedy souřadnice

$$C = B + (1+\sqrt{7})\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} + (1+\sqrt{7})\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - 7\sqrt{7} \\ 8 - \sqrt{7} \end{bmatrix}.$$