MB141 – 1. přednáška
Geometrie v rovině

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2020

K čemu je dobrá lineární algebra a teorie čísel

Motivace. V předmětu MB141 se postupně naučíme

- řešit soustavy lineárních rovnic,
- pracovat s maticemi,
- řešit geometrické úlohy v rovině a v prostoru (uplatnění v počítačové grafice) grafice),
- popisovat pomoc matic některé procesy (růst populací, Markovovy procesy)
- maximalizovat jednoduché funkce, při existenci mnoha jednoduchých omezení (simplexový algoritmus pro úlohu lineárního programování),
- jak se teorie čísel používá v kryptografii s veřejným klíčem.

Osnova přednášky

- Afinní geometrie
- Eukleidovská geometrie
- Orientace, obsah a determinant
- Shodná a lineární zobrazení
- Matice lineárního zobrazení

Body a vektory

Motivace: chceme umět

- počítat s body a přímkami,
- měřit vzdálenosti a úhly, počítat obsahy rovinných útvarů,
- pracovat s přirozenými transformaci roviny jako je otočení kolem bodu a reflexe podle přímky.

Základními objekty budou pro nás

- body,
- vektory.

Vektory jsou zadány uspořádanou dvojicí bodů $\overrightarrow{AB}$, bod A je počáteční, bod B je koncový. Uspořádané dvojice $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ určují stejný vektor $\overrightarrow{u}$, jestliže vhodným posunutím převedeme orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ na orientovanou úsečku $\overrightarrow{CD}$.

Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ můžeme

- sčítat: $\vec{u} + \vec{v}$ dostaneme pomocí rovnoběžníkového pravidla, ▶▶
- násobit reálným číslem $a \in \mathbb{R}$, $a\vec{u}$, ▶▶
- nulový vektor $\vec{o}$ je reprezentován $\overrightarrow{AA}$, opačný vektor k $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ je $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$. ▶▶
- Kombinací násobení a sčítání dostaneme lineární kombinaci vektorů $a\vec{u} + b\vec{v}$. ▶▶

K libovolnému bodu A můžeme přičíst vektor $\vec{u}$. Výsledkem této operace $A + \vec{u}$ je bod B, který je koncovým bodem reprezentace vektoru $\vec{u}$ pomocí orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$. ▶▶

Počítání s body a vektory provádíme pomocí souřadnic.

Souřadný systém

Souřadný systém je určen

- počátkem v bodě P,
- dvěma nenulovými vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ umístěnými do bodu P, které neleží v jedné přímce.

Pro každý bod B v rovině souřadný systém zadává

- reálná čísla x a y taková, že $B = P + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.

Dvojici reálných čísel $[x, y]$ (v hranatých závorkách) nazýváme souřadnicemi bodu B v souřadném systému $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Souřadný systém

Souřadný systém je určen

- počátkem v bodě P,
- dvěma nenulovými vektory $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ umístěnými do bodu P, které neleží v jedné přímce.

Pro každý bod B v rovině souřadný systém zadává

- reálná čísla x a y taková, že $B = P + x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$.

Dvojici reálných čísel $[x, y]$ (v hranatých závorkách) nazýváme souřadnicemi bodu B v souřadném systému $(P, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Jestliže je vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ a souřadnice bodů A a B jsou postupně $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$, pak souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ je dvojice reálných čísel $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (v kulatých závorkách). Uvědomte si, že nezáleží na tom, kterými dvěma body vektor $\vec{u}$ reprezentujeme.

Body (a rovněž vektory) v rovině reprezentujeme tedy jako uspořádané dvojice reálných čísel, tj. prvky množiny $\mathbb{R}^2$.

Přímky

Každý bod přímky p procházející bodem A se směrovým vektorem $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{o}$ napíšeme jako

$$X = A + t\,\overrightarrow{u}$$

pro nějaké reálné číslo t. To je parametrická rovnice přímky p. V souřadnicích

$$[x, y] = [a_x, a_y] + t(u_x, u_y),$$

což lze rozepsat po složkách

$$x = a_x + tu_x,$$
$$y = a_y + tu_y.$$

Přímky

Každý bod přímky p procházející bodem A se směrovým vektorem $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{o}$ napíšeme jako

$$X = A + t\overrightarrow{u}$$

pro nějaké reálné číslo t. To je parametrická rovnice přímky p. V souřadnicích

$$[x, y] = [a_x, a_y] + t(u_x, u_y),$$

což lze rozepsat po složkách

$$x = a_x + tu_x,$$
$$y = a_y + tu_y.$$

Je-li $u_x \neq 0$, spočteme z první rovnice parametr t a dosadíme do druhé rovnice. Po vynásobení u_x, dostaneme tzv. obecnou (nebo implicitní) rovnici přímky

$$-u_y x + u_x y + (a_y u_x - a_x u_y) = 0,$$
$$px + qy + r = 0.$$

Afinní a konvexní kombinace bodů

Přímka určená body A aB, $A \neq B$, má směrový vektor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Její parametrický popis je proto

$$A + t\overrightarrow{u} = A + t(B - A) = A + tB - tA = (1 - t)A + tB.$$

Tato kombinace je tvaru $\alpha A + \beta B$, kde $\alpha + \beta = 1$. Nazýváme ji afinní kombinací bodů A a B. Bod $X = (1 - t)A + tB$ leží

- na úsečce AB, právě když $t \in [0, 1]$,
- na polopřímce opačné k polopřímce $\overrightarrow{AB}$, právě když $t \leq 0$,
- na polopřímce opačné k polopřímce $\overrightarrow{BA}$, právě když $t \geq 1$.

Afinní a konvexní kombinace bodů

Přímka určená body A aB, $A \neq B$, má směrový vektor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Její parametrický popis je proto

$$A + t\overrightarrow{u} = A + t(B - A) = A + tB - tA = (1 - t)A + tB.$$

Tato kombinace je tvaru $\alpha A + \beta B$, kde $\alpha + \beta = 1$. Nazýváme ji afinní kombinací bodů A a B. Bod $X = (1 - t)A + tB$ leží

- na úsečce AB, právě když $t \in [0, 1]$,
- na polopřímce opačné k polopřímce $\overrightarrow{AB}$, právě když $t \leq 0$,
- na polopřímce opačné k polopřímce $\overrightarrow{BA}$, právě když $t \geq 1$.

Kombinaci bodů $(1 - t)A + tB$ pro $t \in [0, 1]$ nazýváme konvexní kombinací bodů A a B. Důvodem je definice konvexní množiny: Podmnožina roviny je konvexní, jestliže s každými dvěma body A a B v ní leží všechny body úsečky AB, tedy všechny jejich konvexní kombinace.

Afinní kombinace tří bodů v rovině

Nechť A, B a C jsou body v rovině, které neleží v jedné přímce. Pak lze každý bod X roviny psát ve tvaru

$$X = A + t\overrightarrow{BA} + s\overrightarrow{CA} = A + t(B - A) + s(C - A) = (1 - t - s)A + tB + sC.$$

Tato kombinace $\alpha A + \beta B + \gamma C$, kde $\alpha + \beta + \gamma = 1$, se nazývá afinní kombinace bodů A, B a C.
Lze ukázat, že tato afinní kombinace leží v trojúhelníku ABC, právě když $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in [0, 1]$. Takovouto afinní kombinaci nazýváme konvexní kombinací tří bodů.

Příklad

Dokažte, že se těžnice v trojúhelníku ABC protínají v jediném bodě.

Střed strany $a = BC$ je afinní kombinace $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. Těžnice na stranu a procházící bodem A a středem strany a má tedy afinní vyjádření

Těžnice v trojúhelníku

$$t_a: \quad (1-t)A + t\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = (1-t)A + \frac{t}{2}B + \frac{t}{2}C.$$

Těžnice v trojúhelníku

$$t_a: \quad (1-t)A + t\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = (1-t)A + \frac{t}{2}B + \frac{t}{2}C.$$

Analogicky těžnice na stranu $b = AC$ je

$$t_b: \quad (1-s)B + s\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C\right) = (1-s)B + \frac{s}{2}A + \frac{s}{2}C.$$

Průnik těchto přímek je určen parametry t a s splňujícími rovnici

$$(1-t)A + \frac{t}{2}B + \frac{t}{2}C = (1-s)B + \frac{s}{2}A + \frac{s}{2}C.$$

Koeficienty u jednotlivých bodů musí být stejné, neboť afinní kombinace pro daný bod je dána jednoznačně. Dostáváme tedy soustavu:

$$1-t = \frac{s}{2}, \quad \frac{t}{2} = 1-s, \quad \frac{t}{2} = \frac{s}{2}.$$

Těžnice v trojúhelníku – dokončení

Její řešení je $t = s = 2/3$. Průnikem těžnic t_a a t_b je bod

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

Nyní stačí ověřit, že tento bod leží i na třetí těžnici t_c zadané afinní kombinací

$$(1-r)C + \frac{r}{2}A + \frac{r}{2}B.$$

Bod T nazýváme těžištěm trojúhelníku ABC.

Těžnice v trojúhelníku – dokončení

Její řešení je $t = s = 2/3$. Průnikem těžnic t_a a t_b je bod

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

Nyní stačí ověřit, že tento bod leží i na třetí těžnici t_c zadané afinní kombinací

$$(1-r)C + \frac{r}{2}A + \frac{r}{2}B.$$

Bod T nazýváme těžištěm trojúhelníku ABC.

Příklad

Určete průnik (průsečík) přímek $p : x + 2y = 200$ a $q : 2x - 9y = 10$.

- Obě přímky zadané obecnou rovnicí : řešíme soustavu.▶▶

Těžnice v trojúhelníku – dokončení

Její řešení je $t = s = 2/3$. Průnikem těžnic t_a a t_b je bod

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

Nyní stačí ověřit, že tento bod leží i na třetí těžnici t_c zadané afinní kombinací

$$(1 - r)C + \frac{r}{2}A + \frac{r}{2}B.$$

Bod T nazýváme těžištěm trojúhelníku ABC.

Příklad

Určete průnik (průsečík) přímek $p : x + 2y = 200$ a $q : 2x - 9y = 10$.

- Obě přímky zadané obecnou rovnicí : řešíme soustavu.▶▶
- Jedna přímka obecně, jedna parametricky : dosadíme.

Těžnice v trojúhelníku – dokončení

Její řešení je $t = s = 2/3$. Průnikem těžnic t_a a t_b je bod

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

Nyní stačí ověřit, že tento bod leží i na třetí těžnici t_c zadané afinní kombinací

$$(1-r)C + \frac{r}{2}A + \frac{r}{2}B.$$

Bod T nazýváme těžištěm trojúhelníku ABC.

Příklad

Určete průnik (průsečík) přímek $p : x + 2y = 200$ a $q : 2x - 9y = 10$.

- Obě přímky zadané obecnou rovnicí : řešíme soustavu.
- Jedna přímka obecně, jedna parametricky : dosadíme.
- Obě přímky zadané parametricky : sestaví se soustava a vyřeší. Viz. průnik těžnic.

Průsečík přímek — obecná diskuse

- Musí průsečík existovat?

Průsečík přímek — obecná diskuse

- Musí průsečík existovat?
  (Ne, přímky mohou být rovnoběžné.)

Průsečík přímek — obecná diskuse

- Musí průsečík existovat?
  (Ne, přímky mohou být rovnoběžné.)
- $$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s. \end{aligned}$$

- Musí průsečík existovat?
  (Ne, přímky mohou být rovnoběžné.)
- $$ax + by = r$$
  $$cx + dy = s.$$

  Ekvivalentně:

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Průsečík přímek — obecná diskuse

- Musí průsečík existovat?
  (Ne, přímky mohou být rovnoběžné.)
- $$ax + by = r$$
  $$cx + dy = s.$$
  Ekvivalentně:
  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$
- Eliminací x dostaneme rovnici $(ad - bc)y = as - cr$, tj. záleží, zda $ad - bc = 0$.

Průsečík přímek — obecná diskuse

- Musí průsečík existovat?
  (Ne, přímky mohou být rovnoběžné.)
-
  $$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s. \end{aligned}$$

  Ekvivalentně:

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

- Eliminací x dostaneme rovnici $(ad - bc)y = as - cr$, tj. záleží, zda $ad - bc = 0$.

Definice

Pro matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazýváme hodnotu $ad - bc$ **determinant**.

Skalární součin vektorů (Eukleidovská geometrie)

Definice

Pro dvojici vektorů $u = (a, b)$ a $v = (c, d)$ definujeme

$$\langle u, v \rangle = ac + bd \,,$$

tzv. skalární součin vektorů.

Definice

Velikost vektoru $u = (a, b)$ je $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Skalární součin vektorů (Eukleidovská geometrie)

Definice

Pro dvojici vektorů $u = (a, b)$ a $v = (c, d)$ definujeme

$$\langle u, v\rangle = ac + bd\,,$$

tzv. skalární součin vektorů.

Definice

Velikost vektoru $u = (a, b)$ je $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pomocí skalárního součinu můžeme počítat odchylky vektorů. Jestliže jsou vektory $u = (a, b)$ a $v = (c, d)$ na sebe kolmé, pak podle Pythagorovy věty je $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Výpočtem podle definice dostanem $ac + bd = 0$, tedy $\langle u, v\rangle = 0$. ▶▶

Odchylky vektorů a přímek

- Vektory u a v jsou kolmé, právě když $\langle u, v\rangle = 0$. Píšeme $u \perp v$.
- Příklad: směrový vektor přímky $ax + by + c = 0$ je $(-b, a)$, normálový (a, b).
- Pro dvojici vektorů u a v se jejich odchylka spočítá pomocí vztahu

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}, \quad \alpha \in [0, \pi] .$$

Odchylky vektorů a přímek

- Vektory u a v jsou kolmé, právě když $\langle u, v\rangle = 0$. Píšeme $u \perp v$.
- Příklad: směrový vektor přímky $ax + by + c = 0$ je $(-b, a)$, normálový (a, b).
- Pro dvojici vektorů u a v se jejich odchylka spočítá pomocí vztahu

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}, \quad \alpha \in [0, \pi]\,.$$

- Rozlišujeme odchylku vektorů a přímek. Pro přímky:

$$\cos\alpha = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad \alpha \in [0, \pi/2]\,.$$

- "Zdůvodnění": Odchylka vektorů $u = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ a $v = (c, 0)$ je evidentně α, což odpovídá vzorci se skalárním součinem, neboť $\langle u, v\rangle = r\cos\alpha \cdot c + r\sin\alpha \cdot 0 = \|u\|\|v\|\cos\alpha$.

Orientace

Mějme uspořádanou dvojici nenulových vektorů $(\vec{u}, \vec{v})$, kde jeden není násobkem druhého. Řekneme, že tato dvojice je

- orientovaná kladně, jestliže jejich odchylka α měřená od prvního vektoru k druhému proti směru hodinových ručiček je v intervalu $(0, \pi)$,
- orientovaná záporně, jestliže jejich odchylka α měřená od prvního vektoru k druhému proti směru hodinových ručiček je v intervalu $(\pi, 2\pi)$.

Orientace

Mějme uspořádanou dvojici nenulových vektorů $(\vec{u}, \vec{v})$, kde jeden není násobkem druhého. Řekneme, že tato dvojice je

- orientovaná kladně, jestliže jejich odchylka α měřená od prvního vektoru k druhému proti směru hodinových ručiček je v intervalu $(0, \pi)$,
- orientovaná záporně, jestliže jejich odchylka α měřená od prvního vektoru k druhému proti směru hodinových ručiček je v intervalu $(\pi, 2\pi)$.

Lze ukázat, že orientaci lze počítat pomocí determinantu takto: Jsou-li $\vec{u} = (a, b)$ a $\vec{v} = (c, d)$, pak dvojice $(\vec{u}, \vec{v})$ je

- orientována kladně, právě když
  $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc > 0$,
- orientována záporně, právě když
  $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc < 0$.

Orientovaný obsah rovnoběžníku

Uvažujme rovnoběžník s vrcholy P, $P + \overrightarrow{u}$, $P + \overrightarrow{v}$ a $P + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Obsah tohoto rovnoběžníku závisí pouze na vektorech $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$, nikoliv na bodu P. Zavedeme pojem orientovaného obsahu rovnoběžníku zadaného uspořádanou dvojicí vektorů $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, označení $S(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Naše představa je, že $S(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ je

- 0, jestliže rovnoběžník zdegeneruje na úsečku,
- obsah rovnoběžníku, je-li dvojice $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orientována kladně,
- obsah rovnoběžníku vynásobený číslem -1, je-li dvojice $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orientována záporně.

Orientovaný obsah rovnoběžníku

Uvažujme rovnoběžník s vrcholy P, $P + \vec{u}$, $P + \vec{v}$ a $P + \vec{u} + \vec{v}$. Obsah tohoto rovnoběžníku závisí pouze na vektorech $\vec{u}$ a $\vec{v}$, nikoliv na bodu P. Zavedeme pojem orientovaného obsahu rovnoběžníku zadaného uspořádanou dvojicí vektorů $(\vec{u}, \vec{v})$, označení $S(\vec{u}, \vec{v})$. Naše představa je, že $S(\vec{u}, \vec{v})$ je

- 0, jestliže rovnoběžník zdegeneruje na úsečku,
- obsah rovnoběžníku, je-li dvojice $(\vec{u}, \vec{v})$ orientována kladně,
- obsah rovnoběžníku vynásobený číslem -1, je-li dvojice $(\vec{u}, \vec{v})$ orientována záporně.

Pak $S(\vec{u}, \vec{v})$ splňuje tato pravidla:

1) $S((1,0),(0,1)) = 1$,
2) $S(\vec{u}, \vec{v}) = -S(\vec{v}, \vec{u})$,
3) $S(a\vec{u}, \vec{v}) = aS(\vec{u}, \vec{v})$ a $S(\vec{u}, a\vec{v}) = aS(\vec{u}, \vec{v})$,
4) $S(\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}) = S(\vec{u}, \vec{v}) + S(\vec{w}, \vec{v})$.

Determinant jako orientovaný obsah

Věta

Orientovaný obsah rovnoběžníku určeného uspořádanou dvojicí vektorů $\overrightarrow{u} = (a, b)$ *a* $\overrightarrow{v} = (c, d)$ *je*

$$S(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Determinant jako orientovaný obsah

Věta

Orientovaný obsah rovnoběžníku určeného uspořádanou dvojicí vektorů $\overrightarrow{u} = (a, b)$ *a* $\overrightarrow{v} = (c, d)$ *je*

$$S(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Označme $\vec{e_1} = (1, 0)$ a $\vec{e_2} = (0, 1)$. Pak $\overrightarrow{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$ a $\overrightarrow{v} = c\vec{e_1} + d\vec{e_2}$. Při využívání pravidel 1) až 4) dostáváme

$$\begin{aligned} S(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &= S(a\vec{e_1} + b\vec{e_2}, c\vec{e_1} + d\vec{e_2}) \\ &= aS(\vec{e_1}, c\vec{e_1} + d\vec{e_2}) + bS(\vec{e_2}, c\vec{e_1} + d\vec{e_2}) \\ &= acS(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + adS(\vec{e_1}, \vec{e_2}) + bcS(\vec{e_2}, \vec{e_1}) + bdS(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \\ &= adS(\vec{e_1}, \vec{e_2}) - bcS(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = ad - bc \end{aligned}$$

Obsah rovnoběžníku zadaného vektory u a v je

$$S = \left| det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|.$$

Příklad

Mějme body $A = [1, 1]$, $B = [7, 2]$, $C = [5, 5]$.
Určete obsah $\triangle ABC$.

Obsah $\triangle ABC$ je tedy $\frac{1}{2}|S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}\left| \det \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right| = 10$.

Orientace a viditelnost

- Pro přímku p a bod X nám orientace(znaménko determinant) poskytuje nástroj, jak rozhodnout, v které polorovině určené přímkou p se bod X nalézá.

Orientace a viditelnost

- Pro přímku p a bod X nám orientace(znaménko determinant) poskytuje nástroj, jak rozhodnout, v které polorovině určené přímkou p se bod X nalézá.
- Nechť p je orientovaná směrovým vektorem $\overrightarrow{AB}$. Vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AX}$ dáme do sloupců matice. Pokud je determinant kladný, je bod X „nalevo od vektoru“ $\overrightarrow{AB}$. Pokud je determinant záporný je bod „napravo“.

  Pozn.: Nezáleží zda do řádků nebo sloupců. Důležité je pořadí vektorů.

Orientace a viditelnost

- Pro přímku p a bod X nám orientace(znaménko determinant) poskytuje nástroj, jak rozhodnout, v které polorovině určené přímkou p se bod X nalézá.
- Nechť p je orientovaná směrovým vektorem $\overrightarrow{AB}$. Vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AX}$ dáme do sloupců matice. Pokud je determinant kladný, je bod X „nalevo od vektoru“ $\overrightarrow{AB}$. Pokud je determinant záporný je bod „napravo“.

  Pozn.: Nezáleží zda do řádků nebo sloupců. Důležité je pořadí vektorů.

Příklad

Jsou dány následující body: $A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$, $C = [25, 18]$, $P = [14, 14]$ a $R = [15, 3]$.
Rozhodněte, které strany a vrcholy $\triangle ABC$ jsou vidět z bodu P.
Rozhodněte, zda je bod R uvnitř $\triangle ABC$.

Viditelnost – příklad

Příklad

$A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$, $C = [25, 18]$, $R = [15, 3]$.

- Z obrázku (nebo zadání) určíme v jakém pořadí jsou vrcholy označeny. (Pozn. když to není zřejmé z obrázku, musíme použít determinant.)

Příklad

$A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$, $C = [25, 18]$, $R = [15, 3]$.

- Z obrázku (nebo zadání) určíme v jakém pořadí jsou vrcholy označeny. (Pozn. když to není zřejmé z obrázku, musíme použít determinant.)
- Zde $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 10)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (15, 22)$,
$det \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} = 8 \cdot 22 - 10 \cdot 15 > 0$.

Viditelnost – příklad

Příklad

$A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$, $C = [25, 18]$, $R = [15, 3]$.

- Z obrázku (nebo zadání) určíme v jakém pořadí jsou vrcholy označeny. (Pozn. když to není zřejmé z obrázku, musíme použít determinant.)
- Zde $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 10)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (15, 22)$,
  $det \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} = 8 \cdot 22 - 10 \cdot 15 > 0$.
  Bod C je nalevo od polopřímky AB. Pořadí vrcholů - kladný směr.

Viditelnost – příklad

Příklad

$A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$, $C = [25, 18]$, $R = [15, 3]$.

- Z obrázku (nebo zadání) určíme v jakém pořadí jsou vrcholy označeny. (Pozn. když to není zřejmé z obrázku, musíme použít determinant.)
- Zde $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 10)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (15, 22)$,
  $$det \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} = 8 \cdot 22 - 10 \cdot 15 > 0.$$
  Bod C je nalevo od polopřímky AB. Pořadí vrcholů - kladný směr.
- Určíme $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 10)$, $\overrightarrow{AR} = R - A = (5, 7)$,
  $$det \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} = 8 \cdot 7 - 10 \cdot 5 > 0.$$

Viditelnost – příklad

Příklad

$A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$, $C = [25, 18]$, $R = [15, 3]$.

- Z obrázku (nebo zadání) určíme v jakém pořadí jsou vrcholy označeny. (Pozn. když to není zřejmé z obrázku, musíme použít determinant.)
- Zde $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 10)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (15, 22)$,
  $det \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} = 8 \cdot 22 - 10 \cdot 15 > 0.$
  Bod C je nalevo od polopřímky AB. Pořadí vrcholů - kladný směr.
- Určíme $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 10)$, $\overrightarrow{AR} = R - A = (5, 7)$,
  $det \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} = 8 \cdot 7 - 10 \cdot 5 > 0.$
  Bod R je nalevo od polopřímky AB.

Viditelnost – příklad – dokončení

Příklad

$A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$, $C = [25, 18]$, $R = [15, 3]$.

- Dále $\overrightarrow{BC} = C - B = (7, 12)$, $\overrightarrow{BR} = R - B = (-3, -3)$,
  $det \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = 7 \cdot (-3) - 12 \cdot (-3) > 0$.
  Bod R je nalevo od polopřímky BC.

Viditelnost – příklad – dokončení

Příklad

$A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$, $C = [25, 18]$, $R = [15, 3]$.

- Dále $\overrightarrow{BC} = C - B = (7, 12)$, $\overrightarrow{BR} = R - B = (-3, -3)$,
  $det \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = 7 \cdot (-3) - 12 \cdot (-3) > 0$.
  Bod R je nalevo od polopřímky BC.
- Konečně $\overrightarrow{CA} = A - C = (-15, -22)$,
  $\overrightarrow{CR} = R - C = (-10, -15)$,
  $det \begin{pmatrix} -15 & -10 \\ -22 & -15 \end{pmatrix} = 15 \cdot 15 - 22 \cdot 10 > 0$.
  Bod R je nalevo od polopřímky CA.

Viditelnost – příklad – dokončení

Příklad

$A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$, $C = [25, 18]$, $R = [15, 3]$.

- Dále $\overrightarrow{BC} = C - B = (7, 12)$, $\overrightarrow{BR} = R - B = (-3, -3)$,
  $$det \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = 7 \cdot (-3) - 12 \cdot (-3) > 0.$$
  Bod R je nalevo od polopřímky BC.
- Konečně $\overrightarrow{CA} = A - C = (-15, -22)$,
  $\overrightarrow{CR} = R - C = (-10, -15)$,
  $$det \begin{pmatrix} -15 & -10 \\ -22 & -15 \end{pmatrix} = 15 \cdot 15 - 22 \cdot 10 > 0.$$
  Bod R je nalevo od polopřímky CA.
- Závěr: bod R je vnitř $\triangle ABC$.
- Viditelnost z bodu P – stejný postup.

Zobrazení roviny

Zkoumáme zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

- Posunutí – jednoduché, přičítáme vektor $\overrightarrow{w}$, $F(X) = X + \overrightarrow{w}$.
- Předokládejme v dalším, že $F([0,0]) = [0,0]$ a bod X reprezentujme vektorem $\overrightarrow{u}$, $X = [0,0] + \overrightarrow{u}$.

Zobrazení roviny

Zkoumáme zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

- Posunutí – jednoduché, přičítáme vektor $\overrightarrow{w}$, $F(X) = X + \overrightarrow{w}$.
- Předokládejme v dalším, že $F([0,0]) = [0,0]$ a bod X reprezentujme vektorem $\overrightarrow{u}$, $X = [0,0] + \overrightarrow{u}$.
- Základní vlastnost (lineární zobrazení): $F(u+v) = F(u) + F(v)$, $F(t \cdot u) = t \cdot F(u)$, pro lib. $t \in \mathbb{R}$.

Zobrazení roviny

Zkoumáme zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

- Posunutí – jednoduché, přičítáme vektor $\overrightarrow{w}$, $F(X) = X + \overrightarrow{w}$.
- Předokládejme v dalším, že $F([0,0]) = [0,0]$ a bod X reprezentujme vektorem $\overrightarrow{u}$, $X = [0,0] + \overrightarrow{u}$.
- Základní vlastnost (lineární zobrazení): $F(u+v) = F(u) + F(v)$, $F(t \cdot u) = t \cdot F(u)$, pro lib. $t \in \mathbb{R}$.

▶▶

- $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = F(x\vec{e_1} + y\vec{e_2}) = xF(\vec{e_1}) + yF(\vec{e_2})$.
  Pokud $F(\vec{e_1}) = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}, F(\vec{e_2}) = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$ potom
  $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y \\ a_2 x + b_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Zobrazení roviny

Zkoumáme zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

- Posunutí – jednoduché, přičítáme vektor $\overrightarrow{w}$, $F(X) = X + \overrightarrow{w}$.
- Předokládejme v dalším, že $F([0,0]) = [0,0]$ a bod X reprezentujme vektorem $\overrightarrow{u}$, $X = [0,0] + \overrightarrow{u}$.
- Základní vlastnost (lineární zobrazení): $F(u+v) = F(u) + F(v)$, $F(t \cdot u) = t \cdot F(u)$, pro lib. $t \in \mathbb{R}$.

- $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = F(x\vec{e_1} + y\vec{e_2}) = xF(\vec{e_1}) + yF(\vec{e_2})$.
  Pokud $F(\vec{e_1}) = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$, $F(\vec{e_2}) = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$ potom
  $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Pozor linearita ještě neznamená podobnost.

Lineární zobrazení a shodnosti

- $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, kde $A \in Mat_{2,2}(\mathbb{R})$.

Lineární zobrazení a shodnosti

- $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, kde $A \in Mat_{2,2}(\mathbb{R})$.
- Sloupce A jsou $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ a $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, což pomáhá, když chceme matici A určit.

- $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, kde $A \in Mat_{2,2}(\mathbb{R})$.
- Sloupce A jsou $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ a $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, což pomáhá, když chceme matici A určit.
- Skládání lineárních zobrazení odpovídá násobení příslušných matic.

Příklad

Napište formuli pro otočení o úhel α kolem počátku.

Podíváme se, kam se při tomto otočení zobrazí vektory $(1, 0)$ a $(0, 1)$.

Lineární zobrazení a shodnosti

- $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, kde $A \in Mat_{2,2}(\mathbb{R})$.
- Sloupce A jsou $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ a $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, což pomáhá, když chceme matici A určit.
- Skládání lineárních zobrazení odpovídá násobení příslušných matic.

Příklad

Napište formuli pro otočení o úhel α kolem počátku.

Podíváme se, kam se při tomto otočení zobrazí vektory $(1, 0)$ a $(0, 1)$.

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Příklad

Je dán pravidelný šestiúhelník se středem v bodě $[2, 2]$ a jedním vrcholem v bodě $[3, 3]$. Napište souřadnice vrcholů.

Příklad

Je dán pravidelný šestiúhelník se středem v bodě $[2, 2]$ a jedním vrcholem v bodě $[3, 3]$. Napište souřadnice vrcholů.

Příklad (obtížnější)

Popište všechna shodná zobrazení roviny do sebe.

- $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Shodná zobrazení

Příklad

Je dán pravidelný šestiúhelník se středem v bodě $[2, 2]$ a jedním vrcholem v bodě $[3, 3]$. Napište souřadnice vrcholů.

Příklad (obtížnější)

Popište všechna shodná zobrazení roviny do sebe.

- $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Platí $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$. Odtud $d^2 = a^2$ a $b^2 = c^2$.

Shodná zobrazení-dokončení

Matici shodného zobrazení lze psát tedy ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$$

kde $a^2 + c^2 = 1$.

Shodná zobrazení-dokončení

Matici shodného zobrazení lze psát tedy ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$$

kde $a^2 + c^2 = 1$.
Pro taková a a c existuje právě jeden úhel $\alpha \in [0, 2\pi]$, že $a = \cos\alpha$ a $c = \sin\alpha$. Matice pak jsou

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Jedná se o rotaci kolem přímky procházející počátkem se směrnicí α nebo osovou souměrnost podle přímky procházející počátkem se směrnicí $\alpha/2$.

Shrnutí, požadavky

- Příklady s přímkami — průsečíky, úlohy s časem.
- Velikosti úseček a úhlů.
- Obsahy n-úhelníků.
- Úlohy s aplikacemi shodných zobrazení.
  (Např. pravidelné n-úhelníky.)
- Úlohy na viditelnost.
  (Včetně polohy bodu vně/uvnitř.)

Domácí úloha

Příklad (1.1)

V rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujeme pravidelný dvanáctiúhelník $A_1A_2\dots A_{12}$, který je vepsán do kružnice s poloměrem 2, se středem $S=[0,0]$ v počátku a vrcholem $A_1=[2,0]$. Přitom vrcholy dvanáctiúhelníku $A_1A_2\dots A_{12}$ jsou číslovány v kladném směru, tj. vrchol A_2 má obě souřadnice kladné.

i) Určete souřadnice vrcholu A_2.

ii) Určete obsah dvanáctiúhelníku $A_1A_2\dots A_{12}$.

iii) Určete obsah trojúhelníku $A_2A_5A_8$.

iv) Určete velikost úhlu, který svírají úhlopříčky A_2A_5 a A_2A_8.

v) Určete průsečík přímek A_2A_9 a A_1A_7.

Domácí úloha

Příklad (1.2)

V rovině jsou dány body $A = [1, 2]$, $B = [3, 9]$, $C = [2, 13]$, $D = [0, 10]$, $E = [5, -1]$ a $F = [3, 1]$. Určete, zda je $ABCD$, resp. $ABEF$, konvexní čtyřúhelník. Určete, zda bod $X = [2, 7]$ resp. $Y = [4, 15]$ leží uvnitř nebo vně tohoto čtyřúhelníku a rozhodněte, které strany konvexního čtyřúhelníku jsou vidět z bodu, který je vně.

Příklad (1.3)

Máme kulečníkový stůl o rozměrech 200×100, tj. „levý dolní roh“ má souřadnice $[0, 0]$ a „pravý horní roh“ má souřadnice $[200, 100]$. Ze středu $[100, 50]$ vyšlu kouli do bodu $[160, 100]$. Do kterého bodu (po dvou odrazech) dopadne koule na „spodní hraně“?