MB141 – 2. přednáška
Soustavy lineárních rovnic a počítání s maticemi

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2020

Osnova přednášky

- Soustavy lineárních rovnic
- Gaussova eliminace
- Operace s maticemi

Soustava lineárních rovnic

Naším cílem bude řešit soustavy lineárních rovnic. Pro zadaná čísla a_{ij} a b_i hledáme čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, která splňují rovnice

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\
a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \dots & + & a_{kn}x_n & = & b_k
\end{array}$$

To je soustava k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$.

- Říkáme, že dvě soustavy jsou ekvivalentní, jestliže mají stejnou množinu řešení.
- Postup řešení – přechod od zadané soustavy k ekvivalentní soustavě, kterou již umíme vyřešit.
- Provádíme pomocí tzv. elementárních úprav.

Rozšířená matice soustavy

Elementární úpravy jsou

- záměna pořadí dvou rovnic,
- vynásobení rovnice nenulovým číslem,
- k dané rovnici přičteme c-násobek jiné rovnice.

K provádění těchto úprav nemusíme psát rovnice. Stačí, když budeme zaznamenávat koeficienty u neznámých a koeficienty pravé strany. K tomu použijeme tzv. rozšířenou matici soustavy.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right) = (A|b)$$

Její levá část, matice A, se nazývá matice soustavy.

Elementární řádkové operace

Elementárním úpravám soustavy rovnic pak odpovídají následující elementární řádkové operace s rozšířenou maticí soustavy.

- záměna dvou řádků matice,
- vynásobení řádku nenulovým číslem,
- k danému řádku přičteme c-násobek jiného řádku.

Které soustavy lze jednoduše vyřešit? jsou to ty, jejichž rozšířená matice soustavy je v tzv. schodovitém tvaru. Příkladem je následující matice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

popisující soustavu o neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Příklad soustavy s maticí schodovitého tvaru

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

V třetí rovnici zvolíme x_5 za parametr a spočítáme x_4:

$$x_5 = p, \quad x_4 = 1 - 2p.$$

Z druhé rovnice spočítáme

$$x_3 = -p - 2(1 - 2p) = 3p - 2.$$

V prvé rovnici zvolíme x_2 za parametr a spočítáme x_1:

$$x_2 = s, \quad x_1 = \frac{1}{2}\big(3 - 2s + 2(3p - 2) - (1 - 2p) - p\big) = \frac{7}{2}p - s - 1$$

Řešením příslušné sosutavy jsou tedy všechny pětice

$$\left[\frac{7}{2}p - s - 1, s, 3p - 2, 1 - 2p, p\right], \text{ kde } p, s \in \mathbb{R}.$$

Schodovitý tvar matice

První nenulové číslo v řádku matice se nazývý pivot nebo také vedoucí koeficient toho to řádku.

Matice $A = (a_{ij})$ je ve schodovitém tvaru, jestliže:

- Její nulové řádky, pokud nějaké má, jsou dole.
- Je-li a_{ij} pivot i-tého řádku, pak $(i+1)$-ní řádek je buď nulový nebo jeho pivot $a_{i+1,p}$ je vpravo od a_{ij}, tj. $p > j$.

Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix}
0\dots0 & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & \dots & \dots & \dots & a_{1,m} \\
0\dots0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,k} & \dots & \dots & \dots & a_{2,m} \\
0\dots0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{3,p} & \dots & a_{3,m} \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots
\end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky.

Algoritmus – Gaussova eliminace

Věta

Nenulovou matici s prvky v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Q}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na schodovitý tvar.

(1) Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.

(2) Pro $i = 2, \ldots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.

(3) Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

(4) Ze schodovitého tvaru vidíme, zda je soustava řešitelná. Pokud ano, umíme popsat množinu všech řešení.

Gaussova eliminace na příkladě

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & & - & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Matici soustavy upravíme pomocí Gaussovy eliminace na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odtud dostaneme řešení

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \left[\frac{4}{5} - \frac{12}{5}q + \frac{4}{5}p,\ -\frac{6}{5} + \frac{8}{5} - \frac{1}{5}p,\ q,\ p\right]$$

Ještě jednou s jinou pravou stranou

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Matici soustavy upravíme stejnými úpravami jako v předchozím případě na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Poslední řádek vede na rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 3$, která evidentně nemá řešení. Tedy ani původní soustava nemá řešení (množina řešení je prázdná).

Další příklad

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

►►

Řešení $[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1)$.

Množina řešení soustavy (nad nekonečným polem $\mathbb{K}$) je: jednoprvková, prázdná nebo nekonečná.
Pro homogenní soustavy (pravé strany nulové) je množina řešení jednoprvková nebo nekonečná.

Operace s maticemi

Dvě matice $A = (A_{ij})$ a $B = (B_{ij})$ stejného tvaru $k \times n$, tj. k řádků a n sloupců, lze sčítat. Výsledná matice $A + B$ má v i-tém řádku a j-tém, sloupci číslo

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Matici $A = (A_{ij})$ tvaru $k \times n$ můžeme násobit číslem c. Výsledkem této operace je opět matice $k \times n$, kterou označujeme cA a v jejímž i-tém řádku a j-tém sloupci je

$$(cA)_{ij} = cA_{i}j.$$

Jestliže prvky matic bereme z množiny přirozených čísel $\mathbb{Z}$ nebo racionálních čísel $\mathbb{Q}$ nebo reálných čísel $\mathbb{R}$, má sčítání matic a násobení matic číslem stejně "hezké"vlastnosti jako sčítání nebo násobení v $\mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R}$.

Násobení matic

Začneme speciálním případem. Součinem matic

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_p \end{pmatrix}$$

tj. řádku velikosti p a slouce velikosti p, je matice 1×1, tj. číslo

$$A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \cdots + A_p B_p.$$

Součinem matice A tvaru $k \times p$ a matice B tvaru $p \times n$ je matice $A \cdot B$ tvaru $k \times n$ taková, že její prvek i-tém řádku a j-tém sloupci je součinem i-tého řádku matice A a j-tého řádku matice B, tj. číslo

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_2 j + \cdots + A_{ip} B_{pj} = \sum_{s=1}^{p} A_{is} B_{sj}.$$

Příklady

Soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \end{array}$$

napíšeme pomocí maticového násobení takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení roviny do roviny zadané v souřadnicích předpisem

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{pmatrix}$$

zapíšeme pomocí maticového násobení takto

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Další příklady

Násobíme-li matici$A$ tvaru $k \times n$ sloupcem velikosti n, který má všude 0, jenom na j-tém místě má 1, je výsledkem násobení j-tý sloupec matice A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

Násobíme-li matici A tvaru $k \times n$ řádkem velikosti k, který má všude 0, jenom na i-tém místě má 1, je výsledkem násobení i-tý sloupec matice A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Jednotková matice

Jednotková matice je čtvercová matice $n \times n$, která má na hlavní diagonále samé 1, jinak samé 0. Budeme ji značit písmenem E, někdy s indexem E_n, který udává její rozměr.
Z předchozího plyne, že pro každou matici A tvaru $k \times n$ platí

$$E_k \cdot A = A, \quad A \cdot E_n = A.$$

Transponovaná matice k matici A tvaru $k \times n$ je matice $A^T = B$ tvaru $n \times k$, taková, že

$$B_{ij} = A_{ji}.$$

Příklad:
$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 & -11 \\ 8 & 1 & -9 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -7 & 1 \\ 4 & -9 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}.$$

Symetrická matice je čtvercová matice taková, že $A^T = A$.

Domácí úloha

Příklad (2.1)

Nalezněte všechny symetrické matice A (to jsou takové, že $A_{ij} = A_{ji}$) rozměru 3×3 s jedničkami na diagonále, pro které platí $(1, 1, 1) \cdot A = (1, 2, 3)$.

Příklad (2.2)

Řešte následující soustavu lineárních rovnic v $\mathbb{R}$, kde x_1, x_2, x_3 jsou neznámé a a a b jsou parametry. Tzn. určete, pro které hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$ má soustava řešení, a pro tato a, b popište množinu všech řešení dané soustavy.

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & +ax_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +bx_3 & = & -1 \\ x_1 & +2x_2 & & = & 1 \end{array}$$