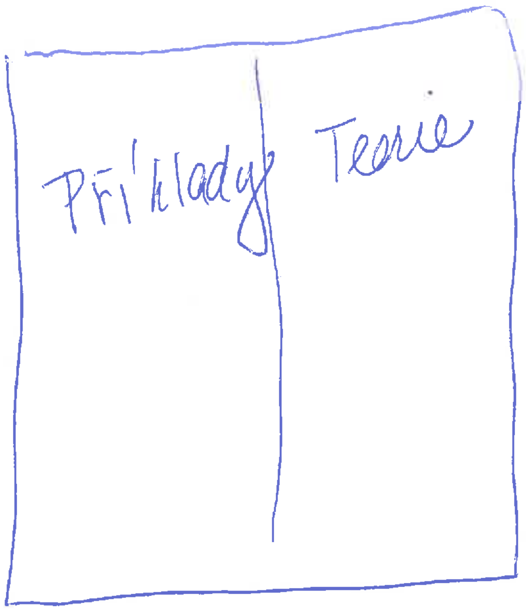
POŽADAVKY

__IS__

studijní materiály
interaktivní osnova

26/3 23/3

SLOVÁK a spol



DRSNÁ MATEMATIKA

2 VNITROSEM. PÍSEMKA

2 × 10 b

5 minipísek po 1 b

25 v semestru

Ve zkoušk. písemka za 20 b

V semestru < 8 F

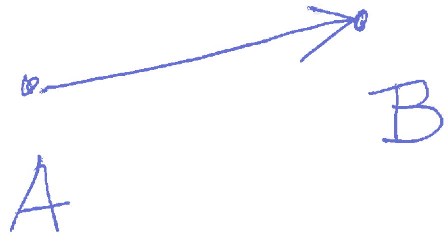
Po zk. < 18 nebo < 5 ze zkoušk. písemky F

Aspoň 5b ze zkoušk. písemky E ≥ 18 D ≥ 22 C ≥ 26

B ≥ 30? A ≥ 34?

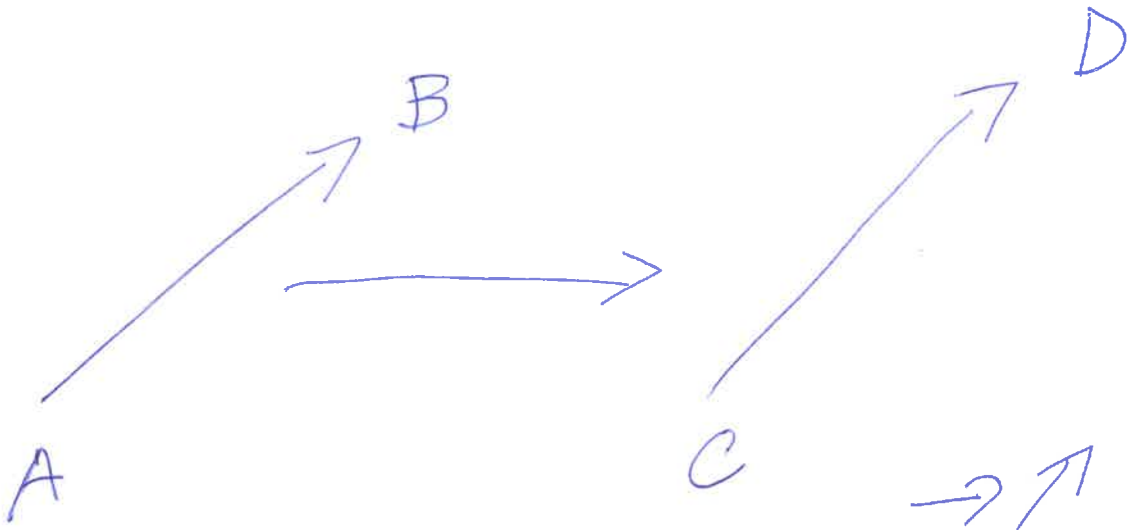
BODY A VEKTORY

Body

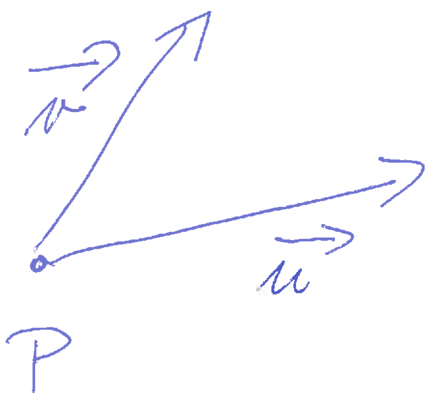


vektory

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

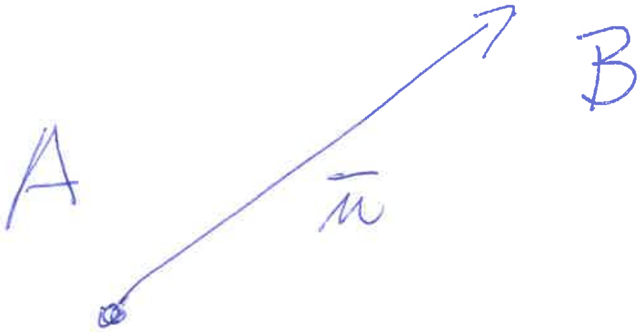


POČÍTÁNÍ S BODY A VEKTORY

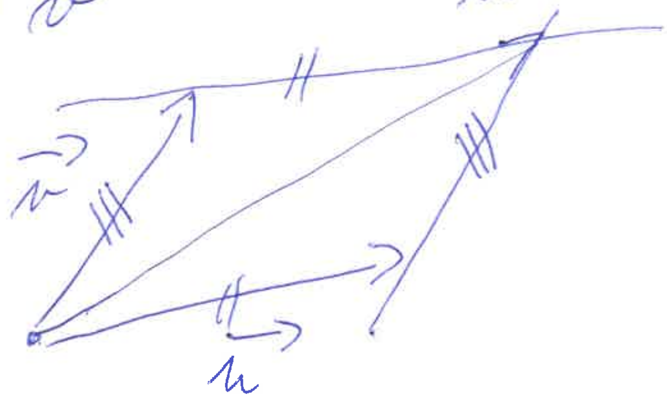
Počítání s body a vektory

bod + vektor = bod

$A + \vec{u} \quad B$



$\vec{u} + \vec{v}$



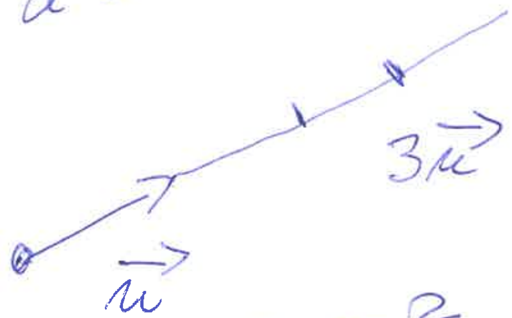
číslo, vektor

$a \in \mathbb{R}$

$\vec{u}$

$a \cdot \vec{u}$ je vektor

$a = 3$



$a = -2$

NULOVÝ A OPAČNÝ VEKTOR

LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ

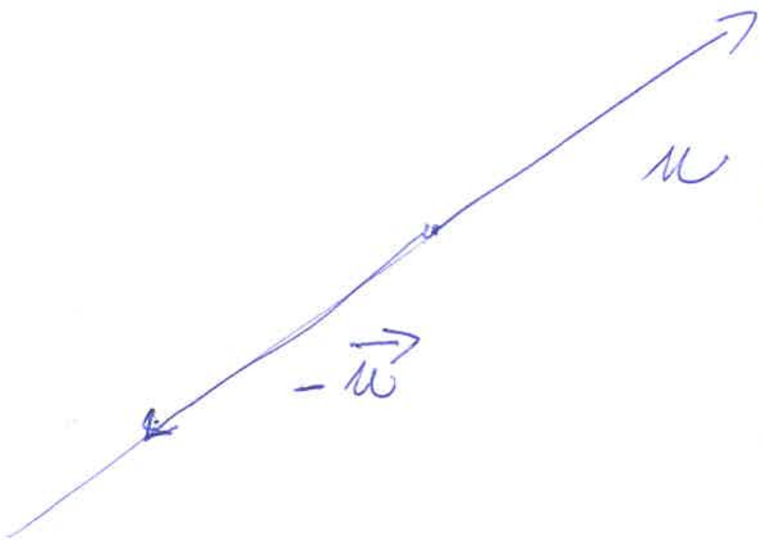
Nulový vektor $\vec{o} = \overrightarrow{AA}$

$$\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$$

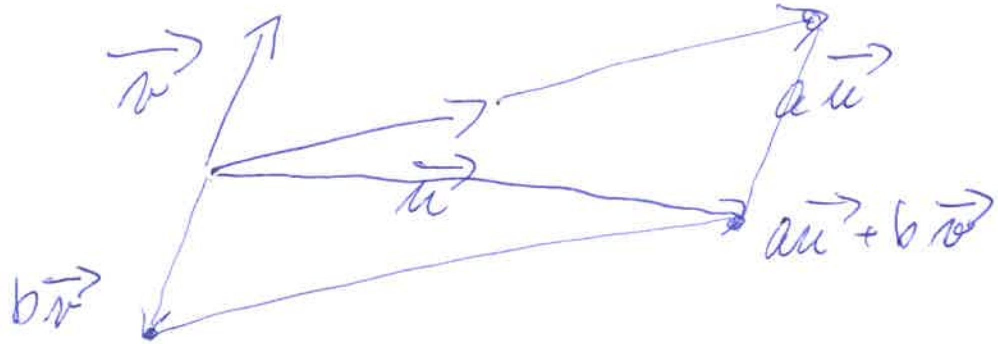
$$A + \vec{o} = A$$

$\forall \vec{u} \ \exists!$ opačný vektor

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$$



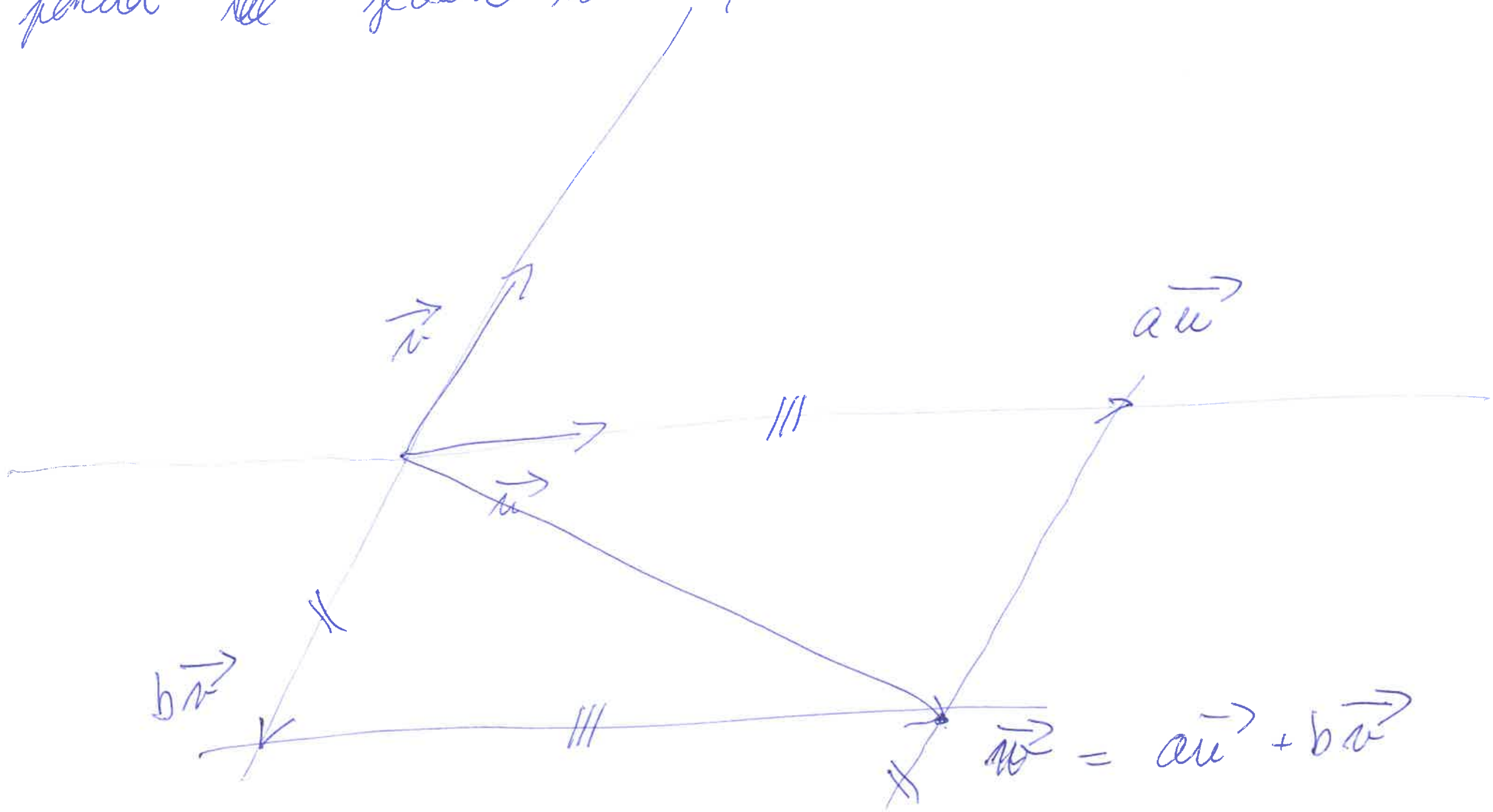
Lineární kombinace vektorů $a\vec{u} + b\vec{v}$



Každý vektor lze psát ve tvaru

$a\vec{u} + b\vec{v}$

pokud ~~[illegible]~~ jeden z $\vec{u}, \vec{v}$ není násobkem 2.

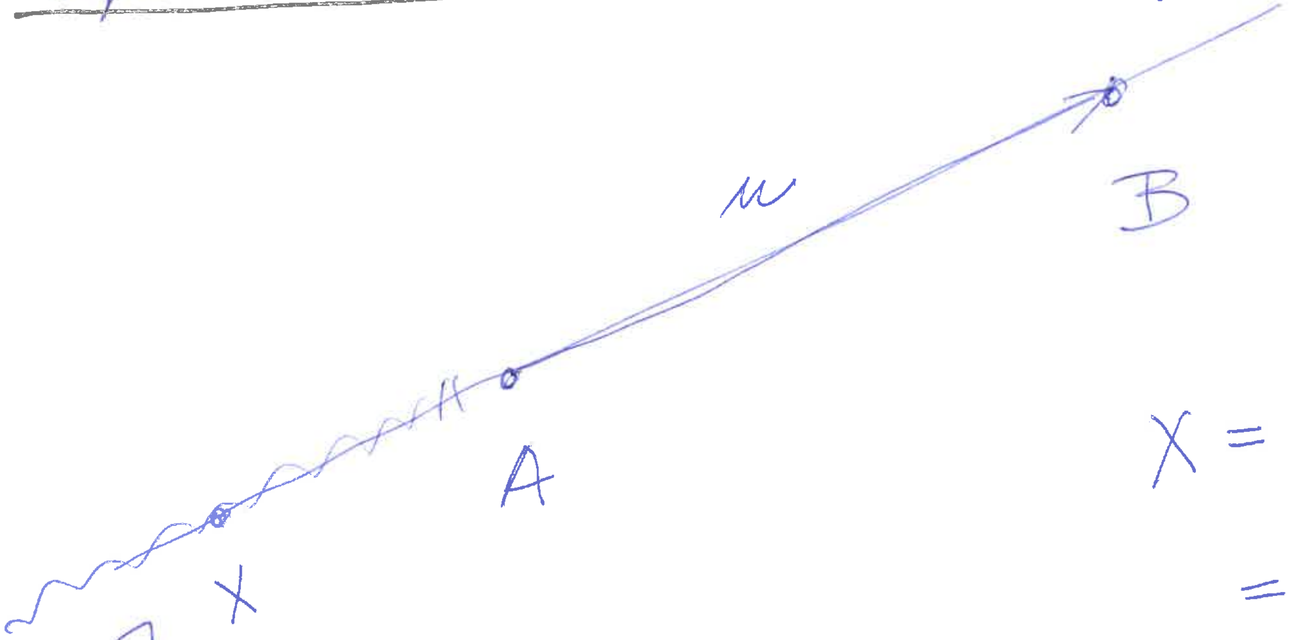


Afinní kombinace bodů

$\alpha < 0, \beta > 1$

$p = \overleftrightarrow{AB}$

$X \in p$ lze psát



$$X = A + t(\overrightarrow{AB}) = A + t(B - A) = A + tB - tA = (1-t)A + tB$$

afinní kombinace bodů A a B

$\alpha A + \beta B$ je afinní kombinace bodů, jestliže $\alpha + \beta = 1$

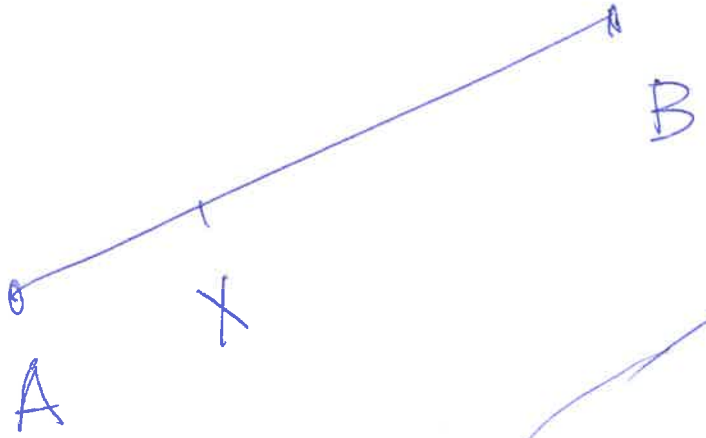
$\alpha, \beta \in [0,1]$ $\alpha A + \beta B$ leží na úsečce AB

$\alpha > 1, \beta < 0$ $X \in$ polopřímce opačné k $\overrightarrow{AB}$

$\cancel{(1-t)A+t}\; X = \alpha A + \beta B \qquad \alpha + \beta = 1$

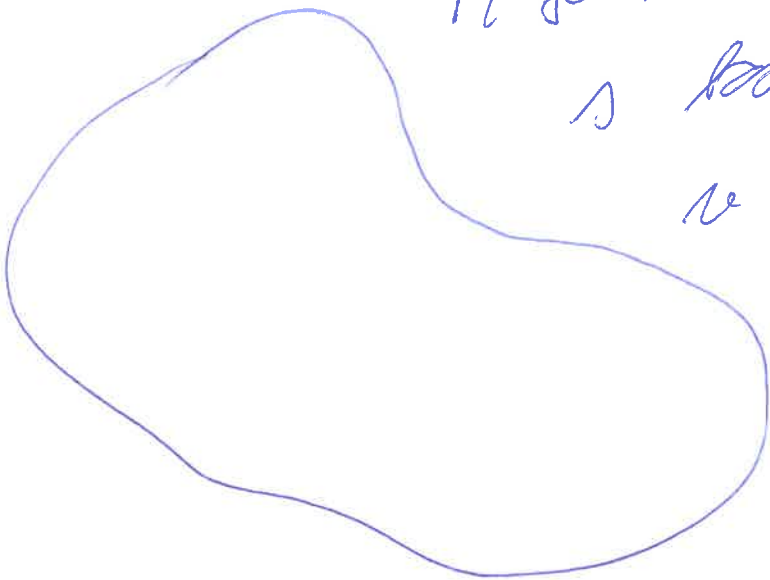
$\alpha, \beta \in [0,1]$

KONVEXNÍ KOMBINACE BODŮ



konvexní kombinace

M je konvexní, jestliže s body $A, B \in M$ leží v M i úsečka AB.



$$A, B \in M \Rightarrow \alpha A + \beta B \in M \quad \forall\, \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \in [0,1].$$

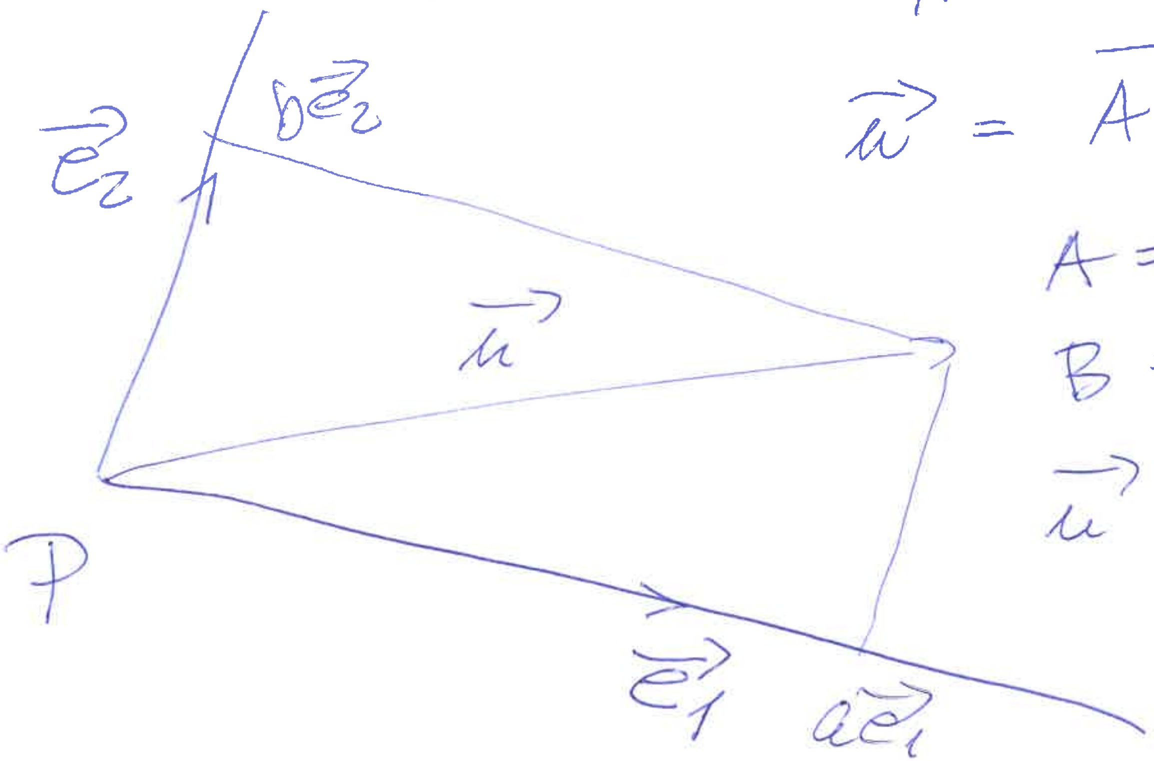
Súradná sústava

počiatok

$$X = P + a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$$

$$X = [a, b]$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$



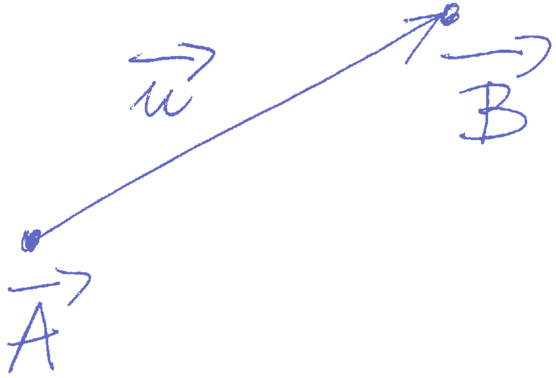
$$A = [a_1, a_2]$$

$$B = [b_1, b_2]$$

$$\vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$\vec{u} = \underline{a}\vec{e_1} + \underline{b}\vec{e_2} \qquad \vec{u} = (a, b)$$

Přímky



$p = \overleftrightarrow{AB}$

$X = \vec{A} + t(\overrightarrow{AB})$

$\vec{u}$ směrový vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$

$\boxed{X = \vec{A} + t\vec{u}}$ parametrická rovnice přímky

$[x, y] = [a_x, a_y] + t(u_x, u_y)$

$= [a_x + tu_x, a_y + tu_y]$

$x = a_x + tu_x$

$y = a_y + tu_y$

$x = a_x + t u_x$ $\qquad \vec{u} \neq \vec{o} \qquad u_x \neq 0$

$y = a_y + t u_y$

$t = \dfrac{x - a_x}{u_x}$

$y = a_y + \dfrac{x - a_x}{u_x} u_y \quad \Big/ \; u_x$

$u_x y = a_y u_x + u_y x - a_x u_y$

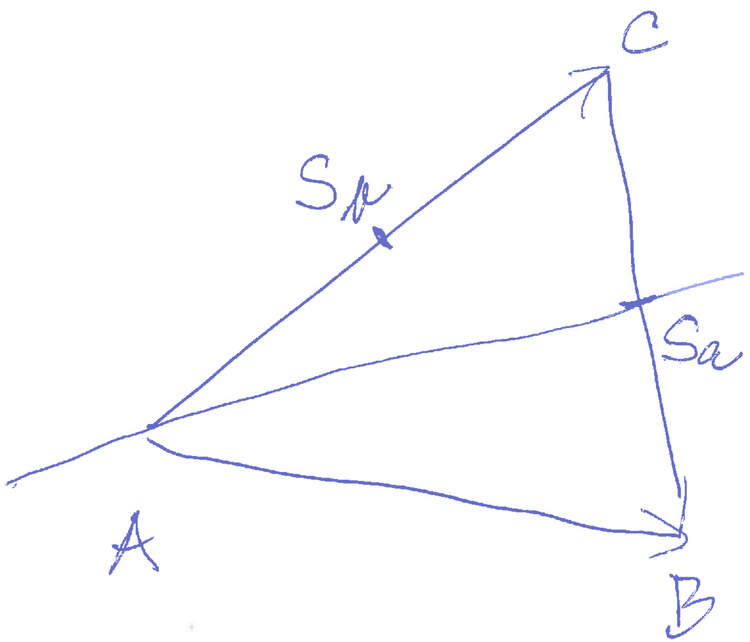
$-u_y x + u_x y + a_x u_y - a_y u_x = 0$

$p x + q y + r = 0$ $\qquad \boxed{\text{obecná rovnice přímky}}$

Směrový vektor $\vec{u} = (u_x, u_y) = (q, -p)$

Příklad Těžnice v $\triangle ABC$ se protínají v jednom bodě.

AFINNÍ KOMBINACE 3 BODŮ



$\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$

$$\overleftrightarrow{AS_a} = (1-t)A + t\left(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C\right)$$

$$= \underbrace{(1-t)A + \tfrac{t}{2}B + \tfrac{t}{2}C}_{\text{afinní kombinace bodů } A,B,C}$$

$$\overleftrightarrow{BS_b} = (1-s)B + s\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}C\right) =$$

$$= (1-s)B + \tfrac{s}{2}A + \tfrac{s}{2}C$$

Průnik

$$(1-t)A + \tfrac{t}{2}B + \tfrac{t}{2}C = (1-s)B + \tfrac{s}{2}A + \tfrac{s}{2}C \Rightarrow$$

A: $1-t = \frac{s}{2}$

B: $\frac{t}{2} = 1-s$

$\frac{t}{2} = \frac{s}{2}$

$\Rightarrow t = s \Rightarrow t = \frac{2}{3} = s$

Průsečík

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = T \text{ těžiště}$$

Tento bod leží na 3. těžnici

$\longleftrightarrow$

CS_c

Průsečík přímek

1)
$$ax + by + c = 0$$
$$ex + fy + h = 0$$

2)
$$ax + by + c = 0$$

1 rovnice, 1 neznámá t

$$[x, y] = [d, e] + t[m, n]$$

$$x = d + tm$$
$$y = e + tn$$

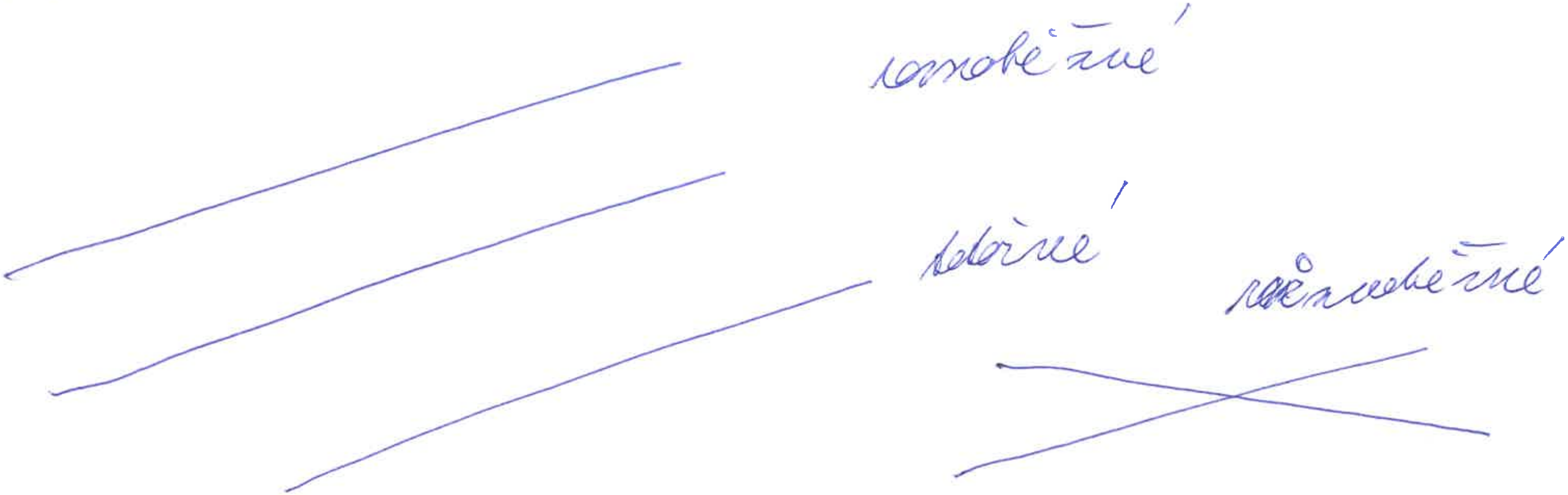
3) 2 parametrické rovnice

$$A + t\vec{u}$$

$$B + s\vec{v}$$

$$A + t\vec{u} = B + s\vec{v}$$

rozepíšeme v souřadnicích, 2 rovnice o neznámých t a s, spočítáme, přičemž dostaneme dosazením.



$$ax + by = r$$
$$cx + dy = s$$

$a \neq 0$

$$ax + by = r$$
$$acx + ady = as$$

$$ax + by = r$$

Od 2. rovnice c-násobek 1. odečteme

$$+(ad - bc)y = as - cr$$

$\boxed{ad - bc} \neq 0$ má rovnice jediné řešení

$$y = \frac{as - cr}{ad - bc}$$

a x dopočítáme

$ad - bc = 0$, ale $as - cr \neq 0$ nemá řešení

$0 \cdot y =$ nenulové číslo

$ad - bc = 0$ a $as - cr = 0 \Rightarrow 0 \cdot y = 0 \Rightarrow$ každé reálné číslo je řešení

Rovnice dvou přímek

$$ax + by = r$$
$$cx + dy = s$$

směr. vektor $(b, -a)$

$(d, -c)$

$\cancel{(a, b)}$
$\cancel{(c, d)}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{\text{def}}{:=} \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ má determinant

$$\boxed{ad - bc}$$

$a \xrightarrow{+} d$ $\qquad$ $b \xrightarrow{-} c$

Determinant rozhoduje o řešitelnosti soustavy.

Vzdálenosti a úhly

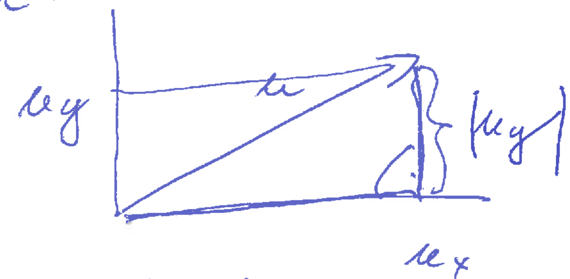
eukleidovská geometrie × afinní geometrie
(poloha)

Skalární součin vektorů

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y$$

$$\vec{u} = (u_x, u_y) \qquad \vec{v} = (v_x, v_y)$$

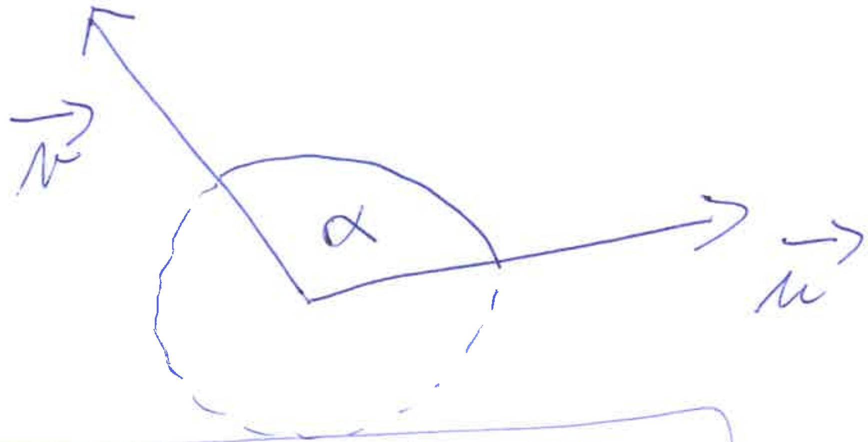
Velikost vektoru – Pythagorova věta



$$|\vec{u}|^2 = |u_x|^2 + |u_y|^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = u_x u_x + u_y u_y$$

Úhly



$\alpha \in [0, \pi]$

$[0, 180^\circ]$

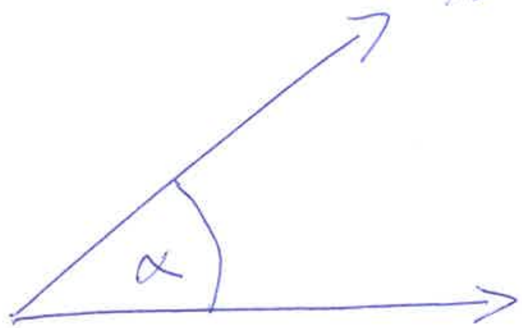
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\langle \vec u, \vec v \rangle}{\|\vec u\| \, \|\vec v\|}}$$

$d > 0$

$\vec v = (d \cos\alpha, d \sin\alpha)$

$\|\vec v\|^2 = d^2 \underline{\cos^2\alpha} + d^2 \underline{\sin^2\alpha} = d^2$

$\|\vec u\|^2 = c^2 + 0 = c^2$



$\vec u = (c, 0)$ $\quad c > 0$

$\langle \vec u, \vec v \rangle = c \cdot d \cos\alpha + 0 \cdot d \sin\alpha = c \cdot d \cos\alpha$

$= \|\vec u\| \, \|\vec v\| \cos\alpha$

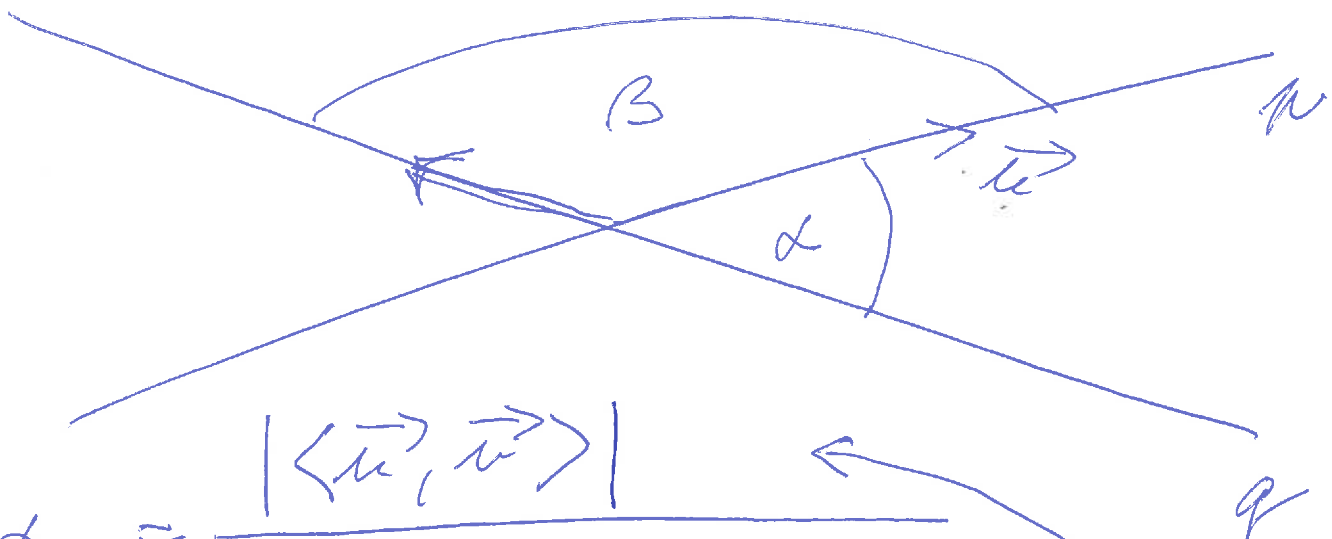
Důležitý speciální případ KOLMOST VEKTORŮ

$\vec{u} \perp \vec{v} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \cos\alpha = 0$

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$

<u>Úhel přímek</u> je číslo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$[0, 90^\circ]$



$$\cos\alpha = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

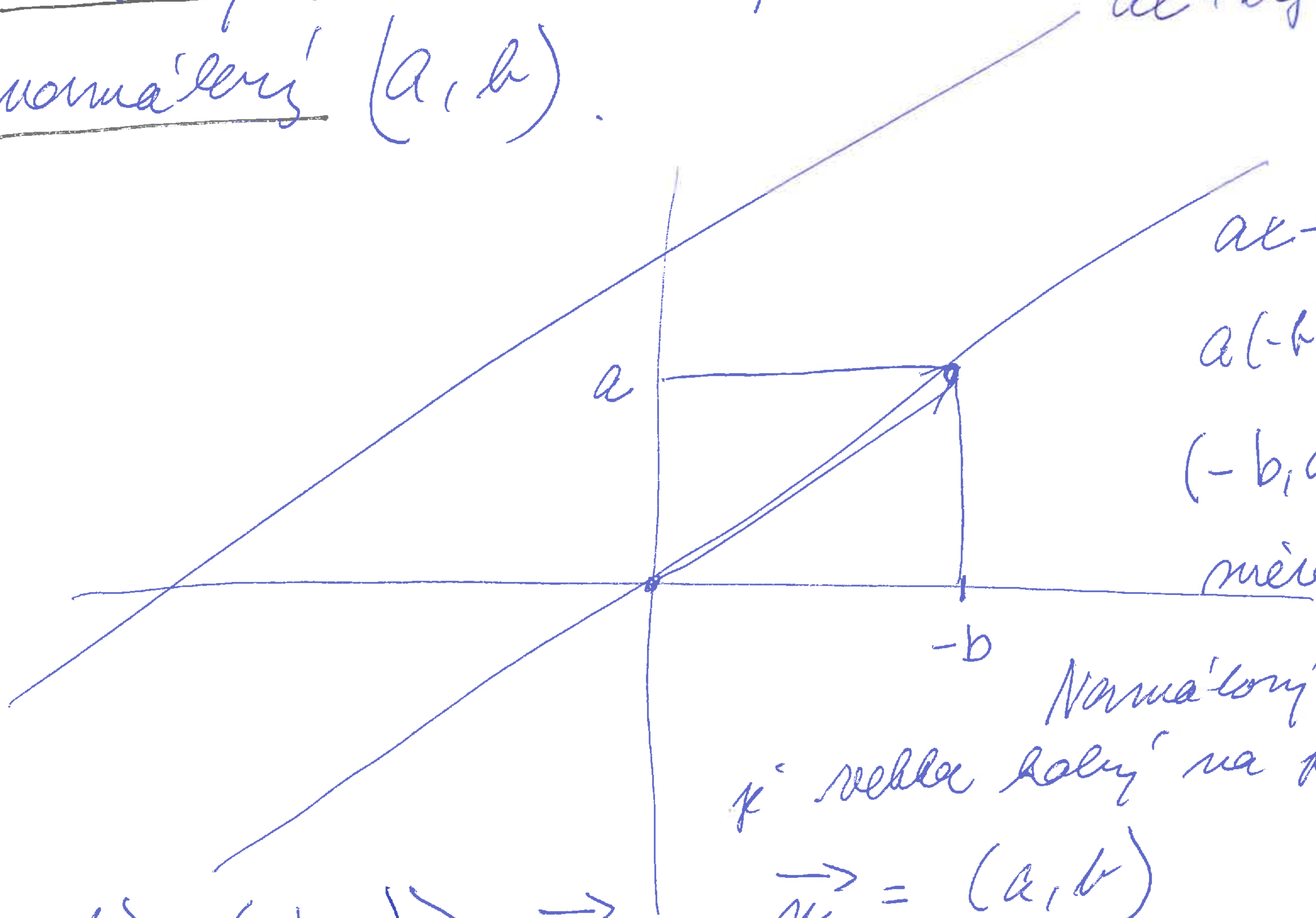
absolutní hodnota

Přímka

$$ax + by + c = 0$$

má <u>směrový vektor</u> $(-b,a)$

a <u>normálový</u> (a,b).



$ax+by = 0$

$a(-b)+ba = 0$

$(-b,a)$ je

směrový vektor

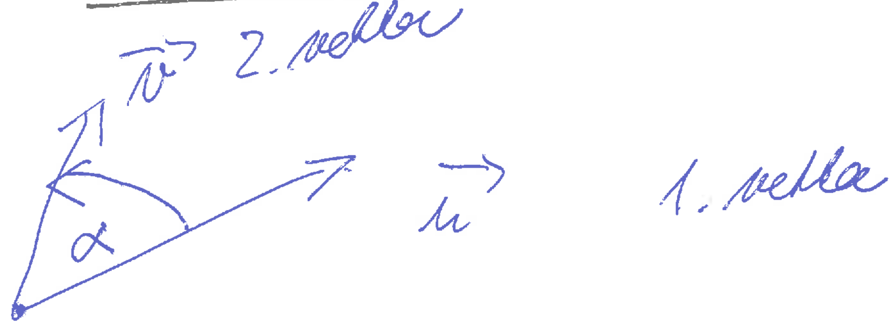
Normálový vektor

je vektor kolmý na přímku

$\vec{n} = (a,b)$

$$\langle (a,b), (-b,a) \rangle = \vec{o}$$

Orientace

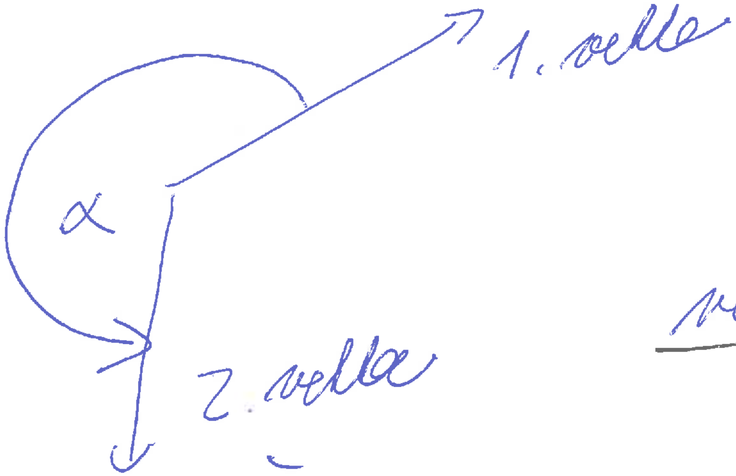


Od $\vec u$ k $\vec v$ proti směru hod. ručiček

$\alpha \in (0, \pi)$ kladná orientace

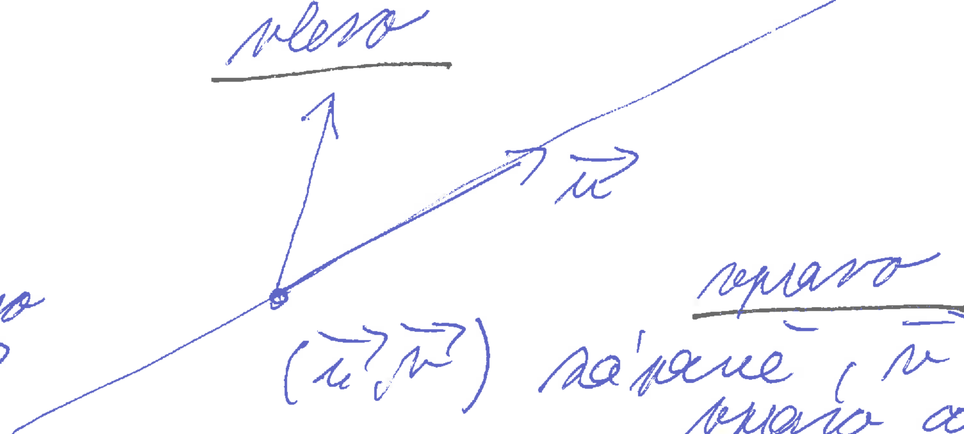
$\alpha \in (\pi, 2\pi)$

záporná orientace



$(\vec u, \vec v)$ orient. kladně

$\vec v$ je vlevo od $\vec u$



vpravo

$(\vec u, \vec v)$ záporně, $\vec v$ je vpravo od $\vec u$

Orientace pomocí determinantu

$\vec{u} = (a, b) \qquad \vec{v} = (c, d)$

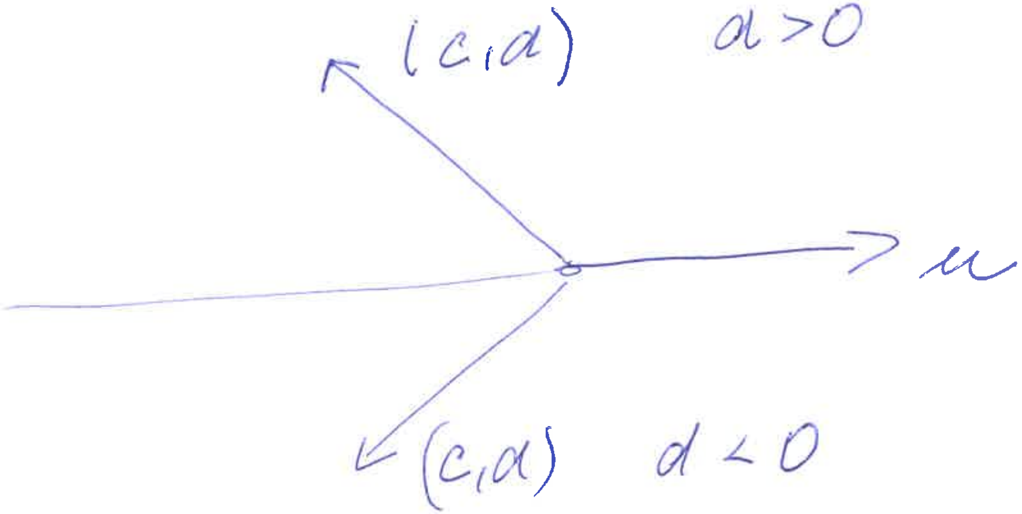
$(\vec{u}, \vec{v})$ je orient. kladně

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc > 0$$

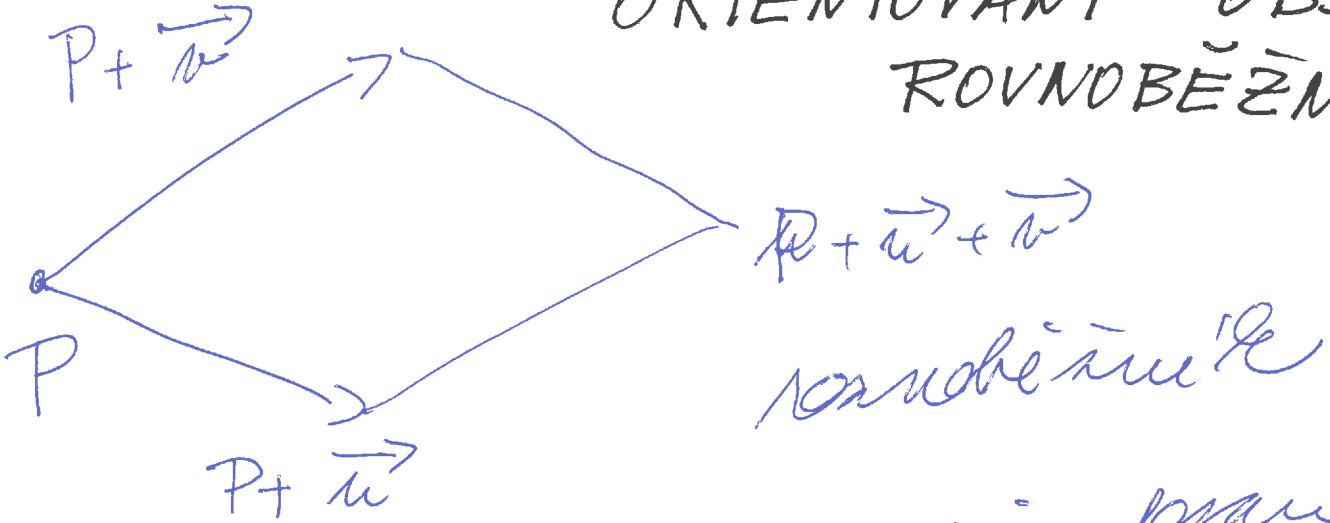
záporně, jestliže $\det < 0$.

$\vec{u} = (1, 0) \qquad \vec{v} = (c, d)$

$$\det = 1 \cdot d - 0 \cdot c = d$$



ORIENTOVANÝ OBSAH ROVNOBĚŽNÍKU



Chceme definovat je orientovaný obsah. Nezávisí na bodu P, jenom na vektorech $\vec{u}, \vec{v}$

$S(\vec{u}, \vec{v})$

Orientace $(\vec{u}, \vec{v})$ je kladná $\quad S(\vec{u}, \vec{v}) =$ obsah

záporná $\quad S(\vec{u}, \vec{v}) = (-1) \cdot$ obsah

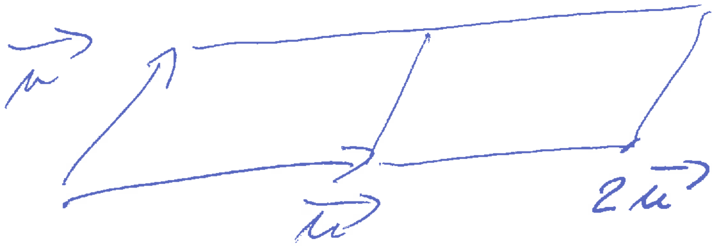
Pravidla pro orientovaný obsah

1) $S(\vec{u},\vec{v}) = -S(\vec{v},\vec{u})$

$\Rightarrow \quad S(\vec{u},\vec{u}) = -S(\vec{u},\vec{u}) \Rightarrow S(\vec{u},\vec{u}) = 0$

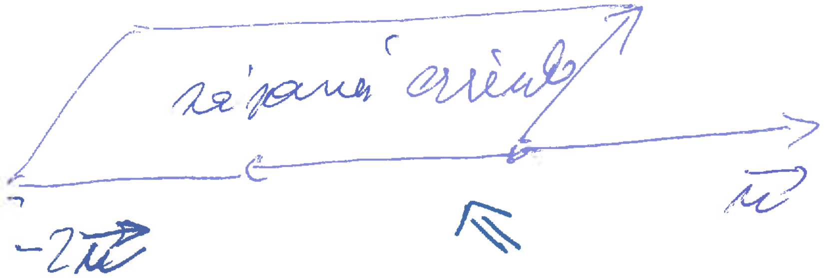
2) $S(a\vec{u},\vec{v}) = a\,S(\vec{u},\vec{v})$

$a = 2 \Rightarrow$



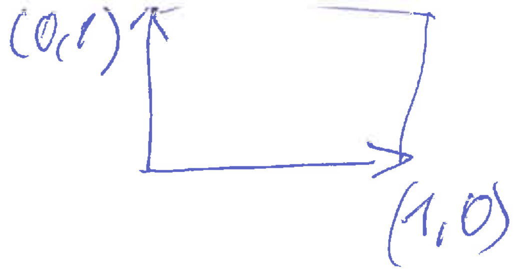
Stejně tak

$S(\vec{u}, b\vec{v}) = b\,S(\vec{u},\vec{v})$

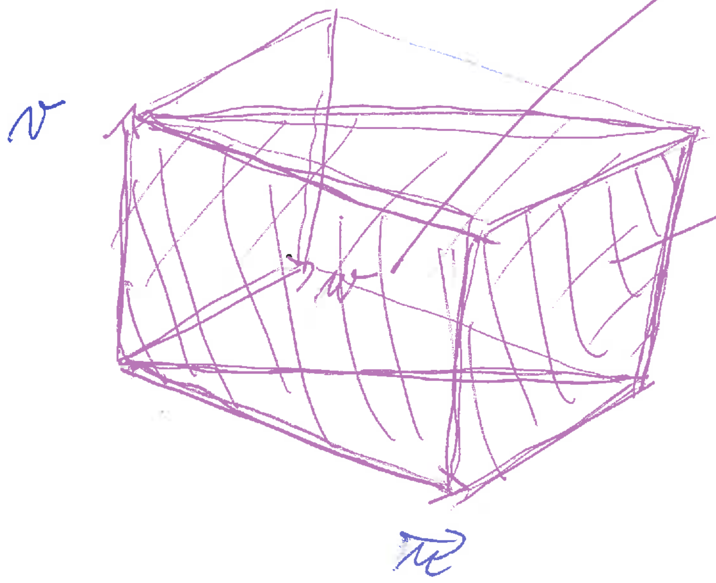


$a = -2$

3) $S(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$



4) $S(\vec{u}+\vec{w}, \vec{v}) = S(\vec{u}, \vec{v}) + S(\vec{w}, \vec{v})$



Rovnost je vidět z obrázku.

Věta

$$S(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

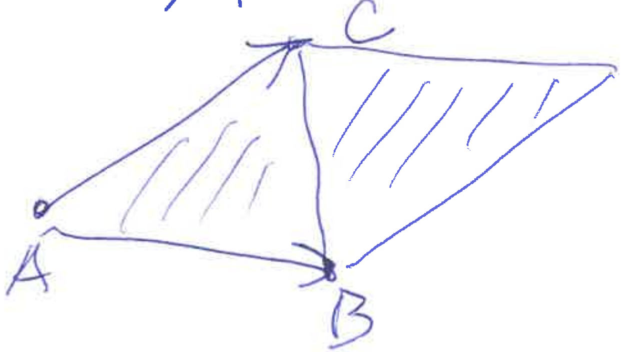
$$\vec{u} = (a, b)$$

$$\vec{v} = (c, d)$$

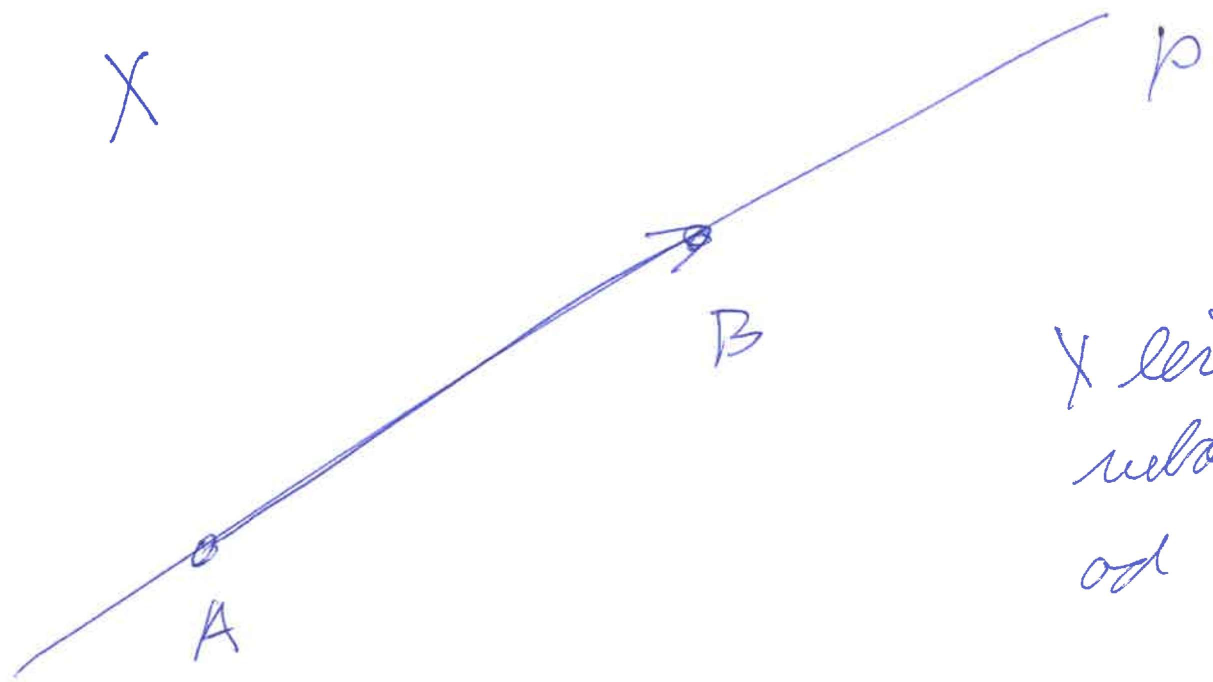
Použití Obsah $\triangle ABC$ $\quad \vec{AB} = (a, b)$ $\quad \vec{AC} = (c, d)$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| S(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$



Viditelnost a poloha



X leží vlevo nebo vpravo od $\overrightarrow{AB}$

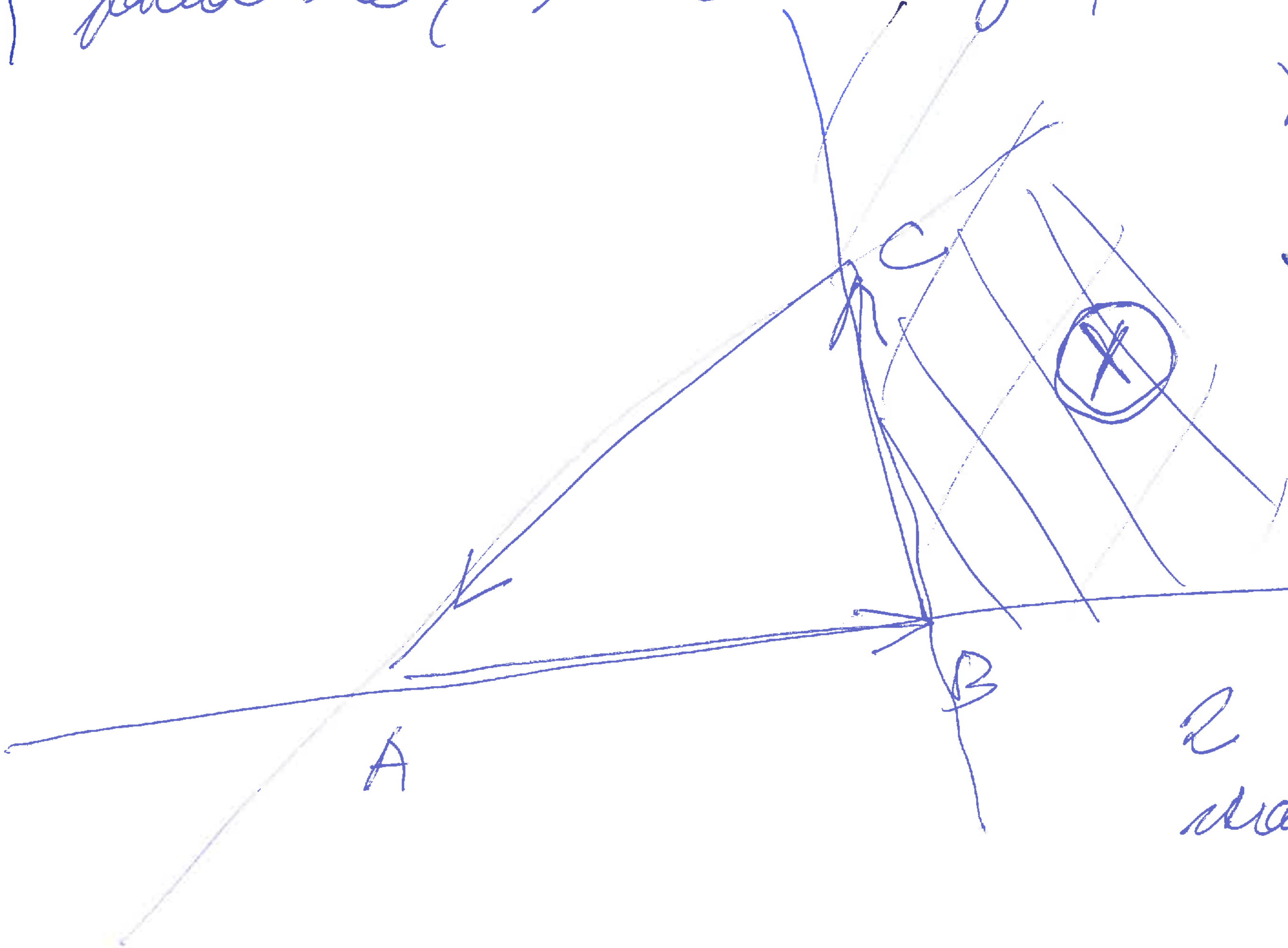
$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AX}) > 0$ vlevo

< 0 vpravo

Dán $\triangle ABC$ a bod X

1) leží X uvnitř $\triangle ABC$?

2) pokud ne, které strany jsou vidět z X?



X leží vlevo od $\overrightarrow{AB}$

X leží vpravo od BC

X leží vlevo od $\overrightarrow{CA}$

Závěr:

z X vidíme pouze stranu BC.