(1)

a_{ij} koeficient v i-tém řádku u x_j

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 9 \\
x_2 + x_3 &= 11 \\
2x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

x_3 z poslední rce.

x_2 z 2.

x_1 z 1.

2

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

$$1x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

$$1x_4 + 2x_5 = 1$$

$x_5 = p$

$$x_4 = 1 - 2x_5 = 1 - 2p$$

$$x_3 = -x_5 - 2x_4 = -p - 2(1-2p) =$$
$$= 3p - 2$$

$x_2 = s$

$$2x_1 = 3 - x_5 - x_4 + 2x_3 - 2x_2$$
$$= 3 - p - (1-2p) + 2(3p-2) - 2s$$
$$= -2 + 7p - 2s$$

$$x_1 = -1 + \frac{7}{2}p - s$$

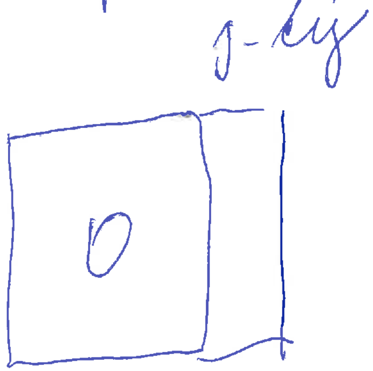
Řešení

$$[-1 + \frac{7}{2}p - s, s, 3p-2, 1-2p, p] =$$

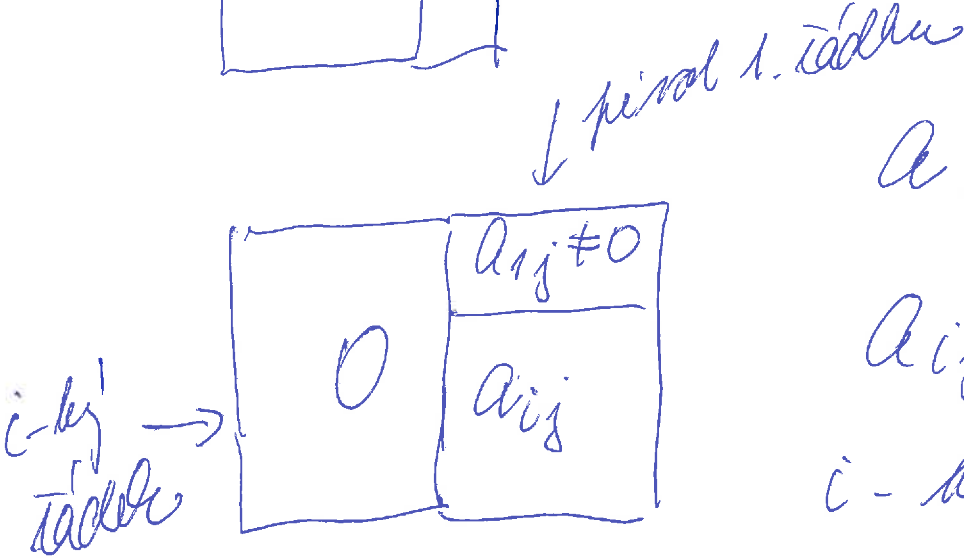
$$= [-1, 0, -2, 1, 0] + p\left(\frac{7}{2}, 0, 3, -2, 1\right) + s(-1, 1, 0, 0, 0)$$

Má nekonečně mnoho řešení, které popsal pomocí 2 parametrů.

(1) Najdeme 1. nenulový sloupec



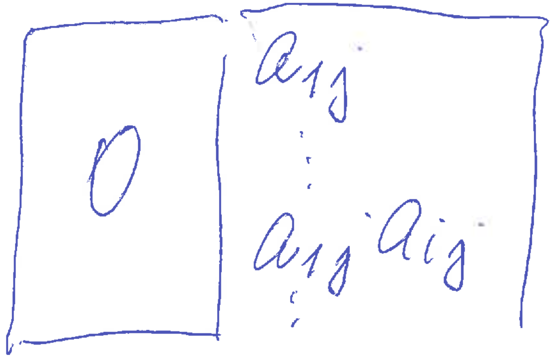
Výměnou řádků lze dosáhnout toho, že $a_{1j} \neq 0$



$a_{ij} = 0$ ✓

$a_{ij} \neq 0$

i-tý řádek vynásobíme $a_{1j} \neq 0$



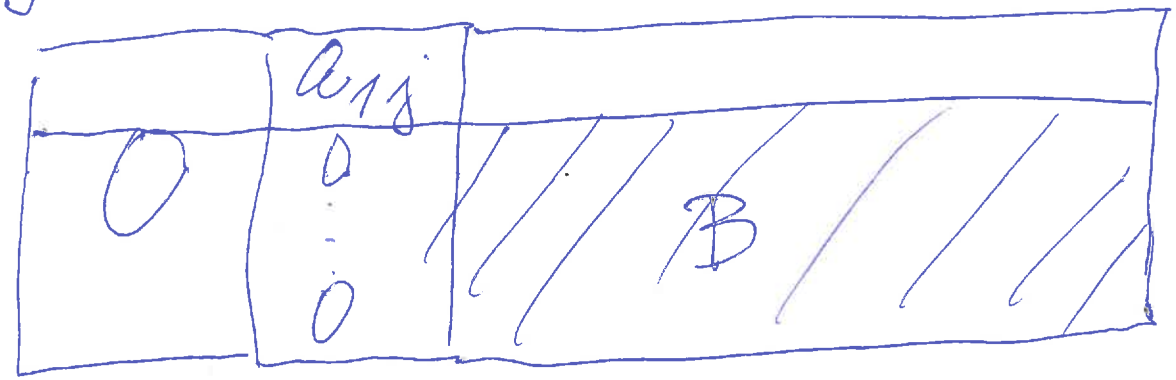
Od i-tého řádku odečteme

a_{ij} – násobek 1. řádku

V i-tém bude

$$a_{1j} a_{ij} - a_{ij} a_{1j} = 0$$

Takto postupně dostaneme pod a_{1j} samé 0



Předchozí postup aplikujeme na menší matici B.

6

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

element. řádkové operace $\sim$

výměna 1. a 3. řádku

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení

$$5x_2 - 8x_3 + x_4 = -6$$

$$x_2 = p, \quad x_3 = s$$

$$x_4 = -6 - 5x_2 + 8x_3 = -6 - 5p + 8s$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 + x_2 - 4x_3 + x_4 =$$

$$= 2 + p - 4s - 6 - 5p + 8s =$$

$$= -4 - 4p + 4s$$

Řešení

$$[-4-4p+4s,\ p,\ s,\ -6-5p+8s]$$

$$= [-4, 0, 0, -6] + p(-4, 1, 0, -5) + s(4, 0, 1, 8)$$

~~Stejná levá strana, jiná pravá strana~~

~~2 3~~

Soustava

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

se předchozí liší koeficientem 1 na pravé straně 1. rovnice

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 3$$

$$0 \neq 3,$$

nemá řešení, tudíž ani soustava nemá řešení.

Homogenní soustava

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = 0$$

$$\text{— — — — — — —} \qquad = 0$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots a_{kn}x_n = 0$$

má VŽDY řešení $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Sčítání matic stejného typu $k \times n$

počet řádků

počet sloupců

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -8 & -9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -4 & -4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

typu 3×2

10

$$c \cdot A = \begin{pmatrix} cA_{11} & cA_{12} & \dots & cA_{1n} \\ cA_{21} & cA_{22} & \dots & cA_{2n} \\ cA_{k1} & cA_{k2} & & cA_{kn} \end{pmatrix}$$

číslo
(skalár)

$$3 \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 24 \\ 6 & 9 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$A + B = B + A$ komutativní

$(A+B)+C = A+(B+C)$ asociativní

nulová matice 3×2 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A + O = A$

$$(c+d)A = cA + dA$$

$$c(A+B) = cA + cB$$

Násobení matic

1×1 číslo

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix} \underset{\text{def}}{=} A_1B_1 + A_2B_2 + \dots + A_pB_p$$

$1\times p$ $\qquad$ $p\times 1$

$$= \sum_{j=1}^{p} A_j \cdot B_j$$

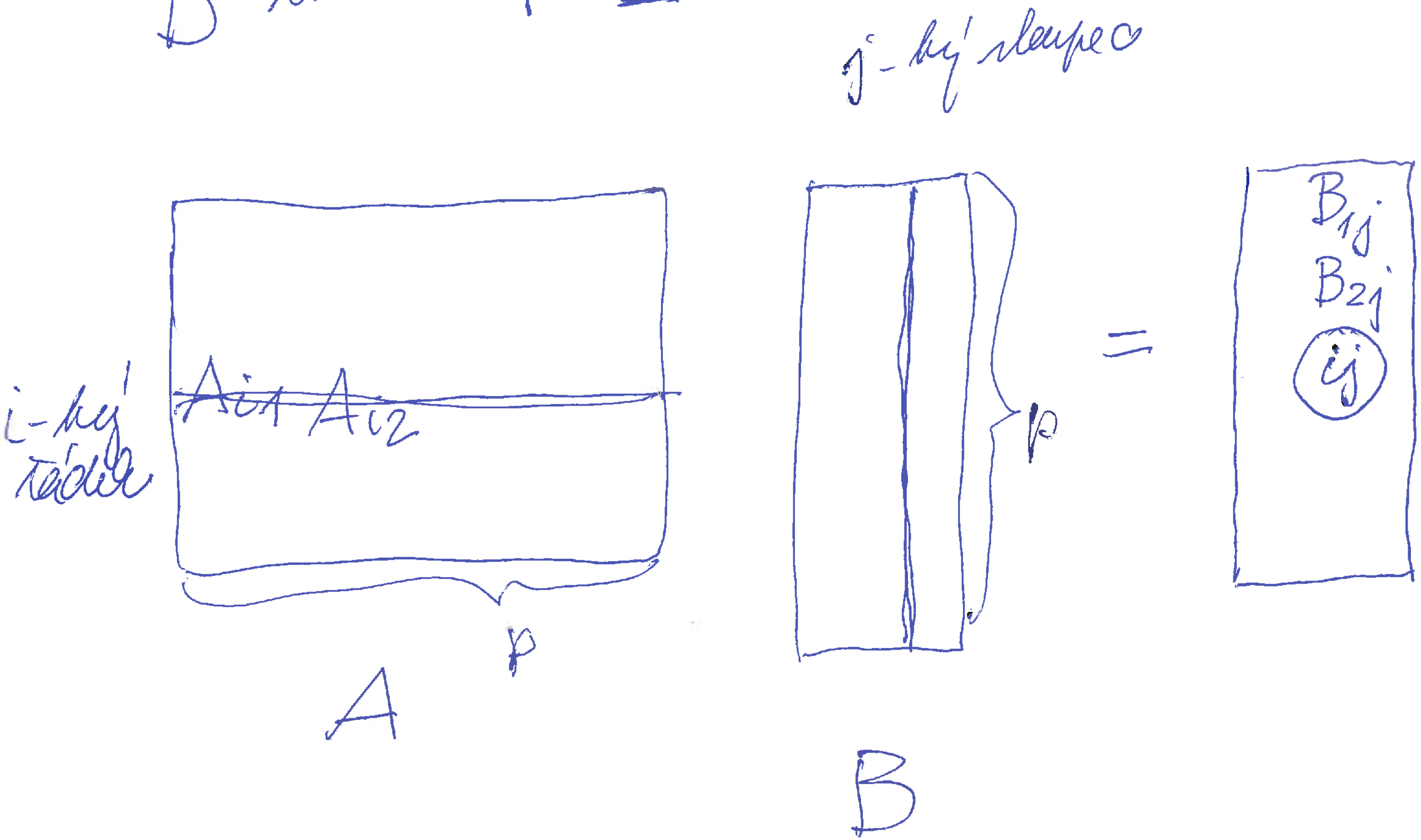
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -4-6+24 = 14$$

$$\sum_{j=1}^{p}$$

A typu $k \times p$

B typu $p \times n$

výsledek $A \cdot B$ typu $k \times n$



$$(A \cdot B)_{ij} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \dots + A_{ip} B_{pj} = \sum_{s=1}^{p} A_{is} B_{sj}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & -15 \\ 45 & -10 \\ -17 & 11 \end{pmatrix}$$

$3 \times 4 \qquad 4 \times 2 \qquad 3 \times 2$

K čemu je to dobré?

Zápis soustav rovnic

$$a x = b$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Zápis zobrazení pomocí násobení matic

Násobení matic není komutativní

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$\underset{A}{(k \times p)} \quad \underset{B}{(p \times n)}$ $\qquad AB$: $k \times n$

$\underset{B}{(p \times n)} \quad \underset{A}{(k \times p)}$ $\qquad$ lze násobit jen pro $n = k$

Aby $A \cdot B$ a $B \cdot A$ mělo smysl musí být $n = k$

$(k \times p) \cdot (p \times k) \rightsquigarrow k \times k$

$(p \times k) \ (k \times p) \rightsquigarrow p \times p$

Abychom mohli násobit a rovnost

$$p = k$$

$$\begin{array}{cccc} A & B & AB & BA \\ k \times k & k \times k & k \times k & k \times k \end{array}$$

Ani v tomto případě obecně

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 19 & 9 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & \end{pmatrix}$$

Platí

$$\underset{k \times s}{} \quad (\underset{k \times p}{A} \cdot \underset{p \times n}{B}) \cdot \underset{n \times s}{C} = \underset{k \times p}{A} \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{p \times s} \quad \underset{k \times s}{}$$

16

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jednotková matice

$n \times n$

$$A \cdot E_3 = A$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = E$$

$$E_2 A = A$$

Symetrická matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & -6 \\ 8 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = A^T$$

$$A^T \cdot B^T = (\underline{B \cdot A})^T$$

DU 1

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix}$$

je popsána pomocí 6 parametrů

$$(1\ 1\ 1)\,A = (1, 2, 3)$$

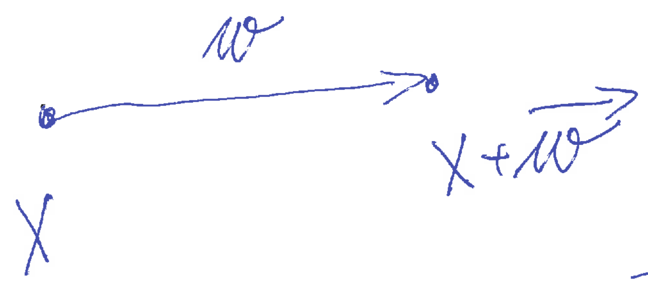
3 rovnice a 6 neznámých.

K 1. přednášce

zobrazení roviny

Posunutí v rovině o vektor $\vec{w}$

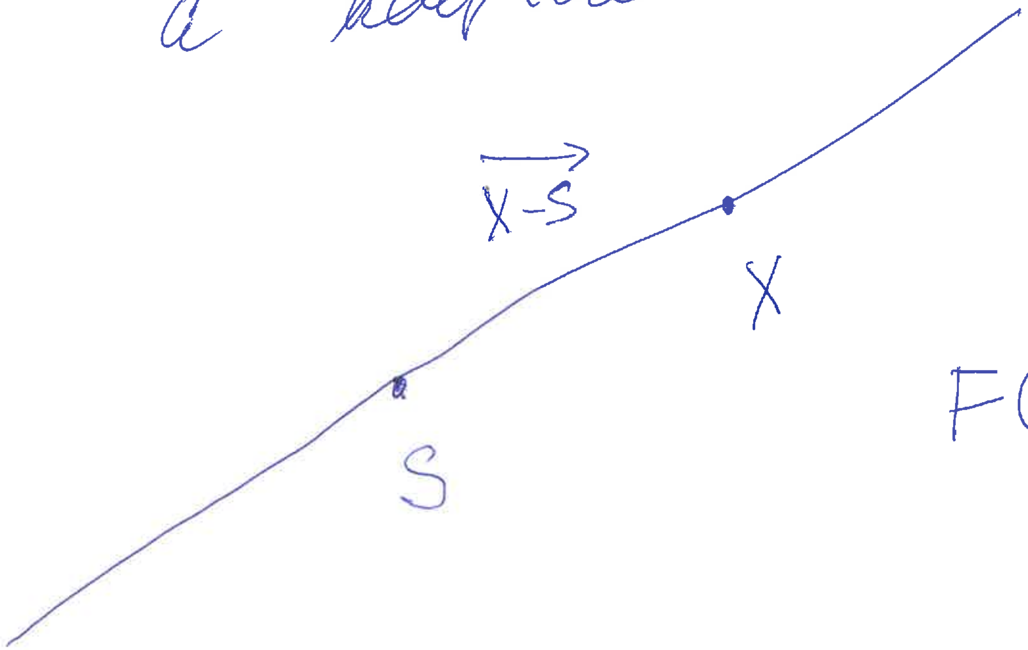
$$X \longmapsto X + \vec{w}$$



$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} x + w_x \\ y + w_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

Stejnolehlost se středem S a koeficientem k



$$F(X) = S + k(\overrightarrow{X-S}) = (1-k)S + kX$$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} x-S_y \\ y-S_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x + kx - kS_x \\ S_y + ky - kS_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-k)S_x + kx \\ (1-k)S_y + ky \end{pmatrix}$$

Zobrazení, která zobrazují počátek opět do počátku

$$F(X) = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

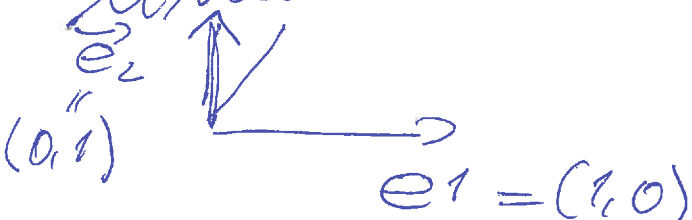
$$X = O + \vec{u}$$

$$F(\vec{u}\,\cancel{y} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$F(c\vec{u}) = c\,F(\vec{u})$$

lineární zobrazení



$$\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

$$F(\vec{u}) = F(x\vec{e_1} + y\vec{e_3}) = F(x\vec{e_1}) + F(ye_2) =$$

$$= x\,F(e_1) + y\,F(e_2)$$

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

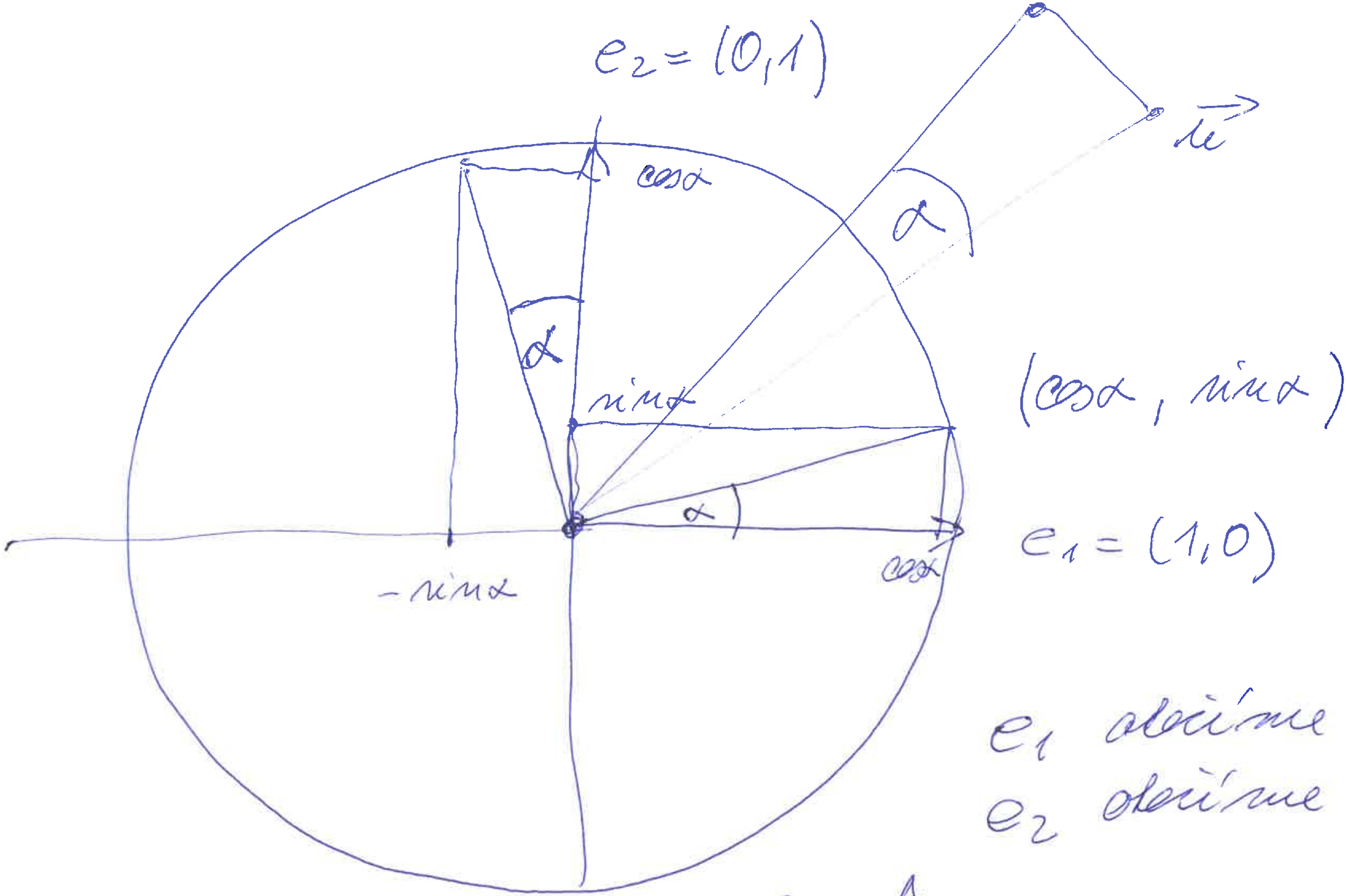
$$F(\vec{e_1}) = F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \text{ 1. sloupec}$$

$$F(\vec{e_2}) = F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} \text{ 2. sloupec}$$

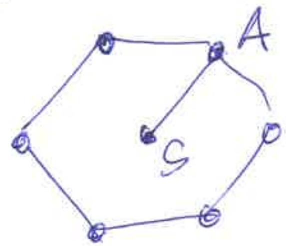
$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

je otočení kolem počátku o úhel α.

$$F(\vec{e_1}) = F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} \qquad F(\vec{e_2}) = F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$



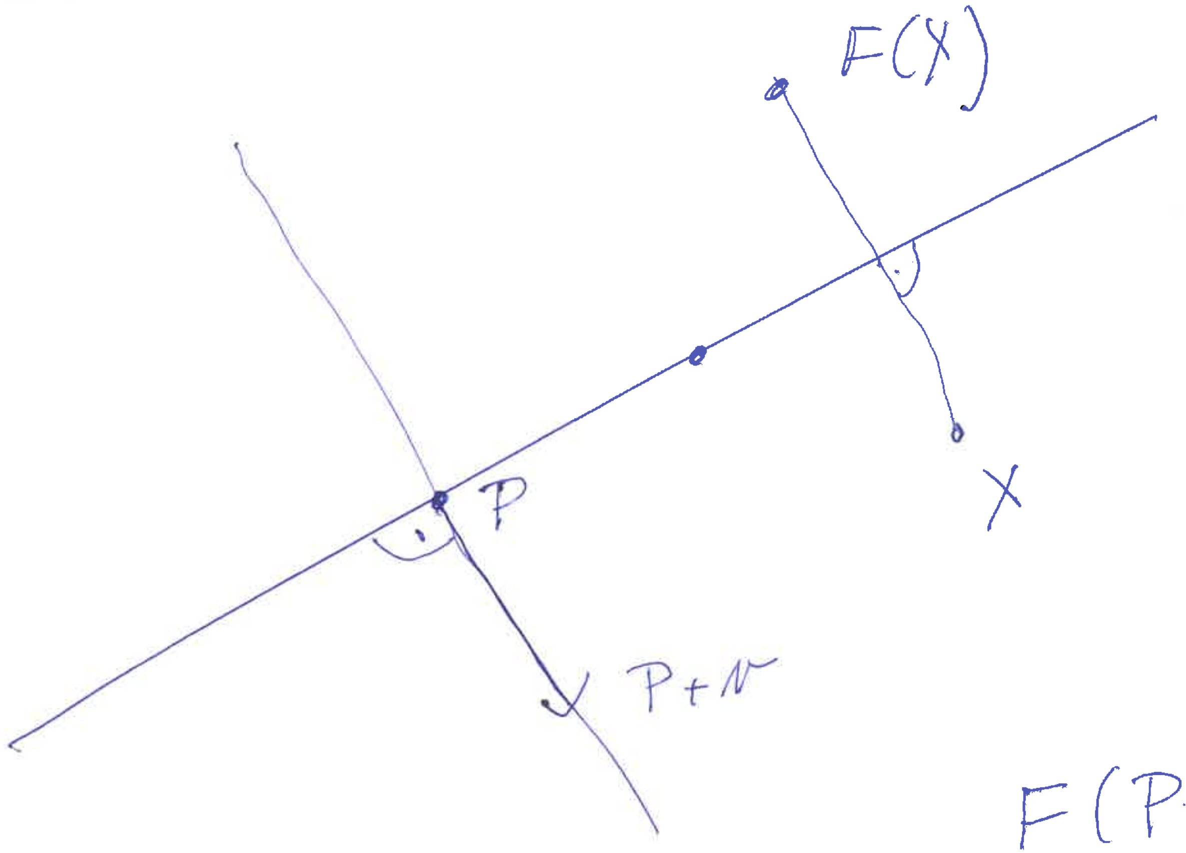
e_1 otočíme o úhel α
e_2 otočíme o úhel α



~~ASB~~ $\vec{SA}$ otočíme o $60°$

$B = S +$ otočený vektor

Reflexe (symetrie) podle přímky



$$F(P+v) = P-v$$