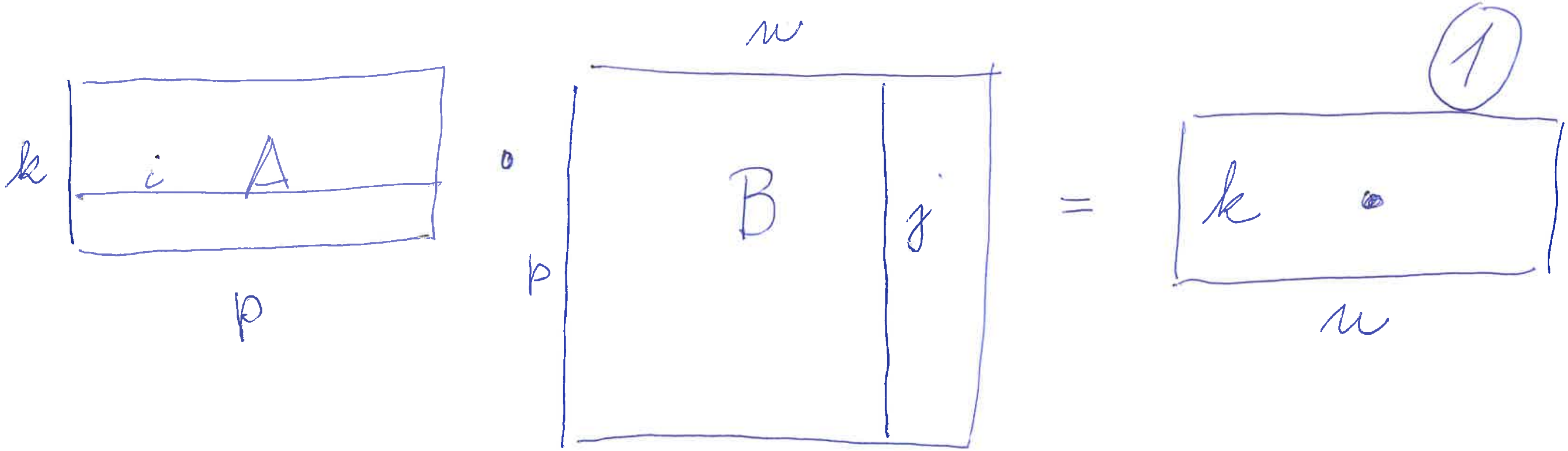


$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{s=1}^{p} A_{is} B_{sj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots$$

$$E_n = \begin{array}{cc} & n \\ n & \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{k\times p}{A} \cdot E_p = A$$

$$E_k \cdot \underset{k\times p}{A} = A$$

Asociativni

$$A(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$$

$$r \neq 0 \qquad \exists\ \frac{1}{r} \qquad r\cdot\frac{1}{r} = 1 \qquad \frac{1}{r}\cdot r = 1$$

A matrica $n\times n$ B je inverzna k A $(n\times n)$

$$A\cdot B = E = B\cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad A\cdot B = \begin{pmatrix} 0\,0\cdots 0 \\ \\ \end{pmatrix} \neq E$$

A je singularna, ne obstaja $\cancel{B}$ $\underset{n\times n}{X}$ tak, da $A\cdot X = E$

$$A\cdot s_1(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},\quad A\cdot s_2(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots$$

$\left(A \middle| \begin{matrix}1\\0\\\vdots\\0\end{matrix}\right)$ $\left(A \middle| \begin{matrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{matrix}\right)$ ..... $(A|E)$ a budeme postupně element. řádk. operace, abychom A uvedli do schod. tvaru

$$(A|E) \sim \dots \sim (C|D)$$

C je ve schod. tvaru

- v C je poslední řádek nulový ⇒ soustava nemá řešení ⇒ inv. matice k A neexistuje
- C nemá nulý řádek, všechny pivoty leží na úhlopříčce

zpětná Gaussova eliminace

$$C = \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ 0 & & & \ddots \ \bullet \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \\ \bullet & 0 & \\ & \bullet & \end{array}\right) \quad a \neq 0$$

$$(C|D) \sim \cdots \sim (E|B)$$

$$\left(E \,\middle|\, \begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{matrix}\right) \qquad \begin{matrix} x_{11} = b_{11} \\ x_{21} = b_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} = b_{n1} \end{matrix}$$

B je inverzní matice k matici A.

Značíme A^{-1}.

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$A^{-1} \cdot A = E$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

A

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/9 & 7/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 4/9 & 7/9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/9 & -1/9 & -13/9 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 4/9 & 7/9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

$$\underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \frac{1}{9} \underline{\begin{pmatrix} 5 & -1 & -13 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} = \quad 1 \; 0$$

det $A = |A|$ je číslo, které odkazuje a řešitelnosti soustavy

$$Ax = b \qquad A \quad n \times n$$

$$x \quad n \times 1 \qquad b \quad n \times 1$$

- $Ax = b$ je řešitelná, jednoznačně právě když $\det A \neq 0$.

- spojitost s inverzí

$$A \cdot x = b$$

a A^{-1} existuje, pak má soustava řešení:

$$A \cdot x = b \quad / \; A^{-1} \cdot$$

$$A^{-1}(A \cdot x) = A^{-1} \cdot b$$

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{E} \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$E \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

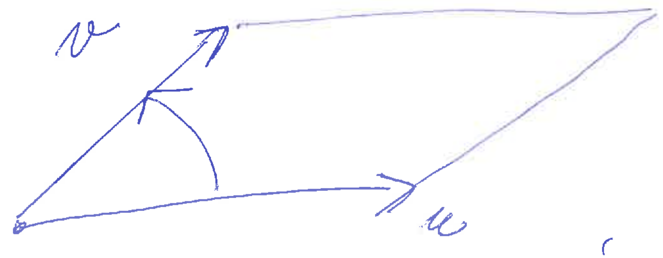
$$x = A^{-1} \cdot b$$

A^{-1} existuje, právě když $|A| \neq 0$.

Geometrický význam

A je 2×2 $\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

$\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ je orientovaný obsah rovnoběžníku



A je matice 3×3 $\quad \det A = |A|$ je orientovaný objem rovnoběžnostěnu zadaného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$A = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{pmatrix}$

rovnoběžnostěn

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ kladná orientace

$\det = +$ objem

záporná or.

$\det = (-1)\cdot$ objem

$|A| > 0$ kladná orient.

< 0 záporná

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$n!$ sčítanců $\qquad n! \sim n^{n/2}$

---

1) B vznikla z A přehozením řádku

$$\det B = -\det A$$

2) B vznikla z A vynásobením i-tého řádku číslem c

$$\det B = c \cdot \det A$$

3) B vznikla z A přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku $\quad i \neq j$

$$\det B = \det A$$

4) $\det E = 1$

5) $\det A^T = \det A$

---

6) Vzhledem k sloupc. operacím se det chová stejně jako ke řádk. operacím.

7) det matice ve schod. tvaru je součin čísel na úhlopříčce

$A \rightsquigarrow$  $\sim \dots \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}$

$$= c_1 \cdot c_2 c_3 c_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \qquad \det = c_1 c_2 c_3 c_4 \cdot 1$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} \end{array} = |A| \cdot |C|$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = (-1)\,(1)\cdot(-1)\cdot 9 = \underline{9}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-6)$$

$$= \underline{\underline{12}}$$

$3.\check{r} - \frac{5}{3}\, 2.\check{r}.$ $\qquad 6 - \frac{5}{3} \cdot 4 = \frac{18-20}{3}$

11

Cauchyova věta

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

---

nechť A má inverzi

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$|A \cdot A^{-1}| = |E| = 1$$

$$\parallel$$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \implies |A| \neq 0$$

$$\implies |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

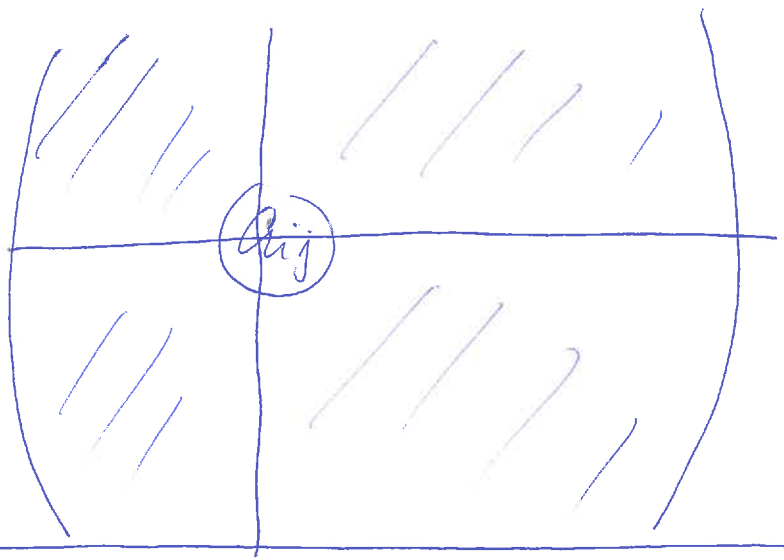
EKV. VÝROKY

- $|A| \neq 0$ $\Uparrow$ $x = A^{-1}b$
- A^{-1} existuje
- $\Uparrow$ $\forall b$ má soustava $Ax = b$ právě jedno řešení.

Laplaceův rozvoj det

$A = (a_{ij})$ $n \times n$

A_{ij} je matice $(n-1)\times(n-1)$, která vznikne z A, vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce



A_{ij} matice

číslo $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$

algebraický doplněk čísla (prvku) a_{ij}

Laplaceův rozvoj podle 1. řádku

$$|A| = a_{11}\hat{A}_{11} + a_{12}\cdot\hat{A}_{12} + a_{13}\cdot\hat{A}_{13} + \dots + a_{1n}\hat{A}_{1n}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\underline{\underline{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}}} + 2\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-2)\,7(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\,(3\,6-5\cdot4) - 14\,(3\cdot6-5\cdot4) =$$

$$= (3\cdot6-5\cdot4)\,(8-14) = (-2)(-6) = \underline{\underline{12}}$$

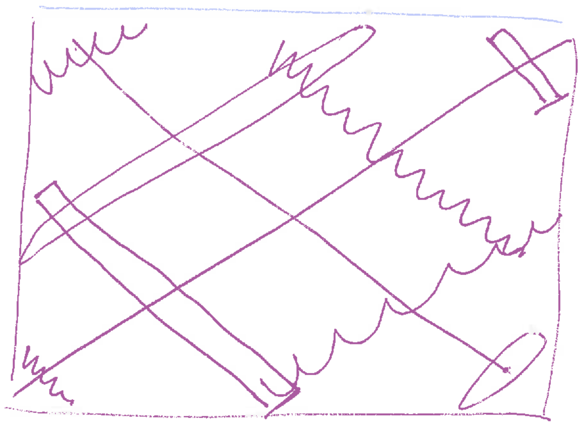
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (3\cdot6-5\cdot4)\,(1\cdot8-2\cdot7) = \underline{\underline{12}}$$

Det 3×3 $\quad (-1)^{1+2}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$=$

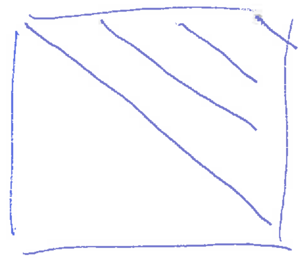


$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$3! = 3\cdot 2 = 6$$



Pro matice 4×4 toto "pravidlo" neplatí

8 součinů $\qquad 4! = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$

A $n \times n$ $\det A \neq 0$

$$Ax = b$$

její řešení (je jednoznačné) lze spočítat takto

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_i = \frac{\begin{array}{c} \text{i-tý sloupec} \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & & a_{1n} \\ & & b_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & b_n & & \end{vmatrix} \end{array}}{|A|}$$