MB141, zkouška 23. 6. 2020

Příklad. 1A. V prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory

$$P = [(1,1,-1,-1),(2,3,2,-2)], \quad Q = [(2,0,1,1),(4,4,7,-1)].$$

(a) Najděte báze a dimenze jejich průniku [12 bodů] a součtu [8 bodů].
(b) Zjistěte pomocí výpočtu, zda vektor $(1,2,3,4)$ leží v podprostoru $P+Q$. [5 bodů] Body budou uděleny jen za správné zdůvodnění.

Řešení. **(a)** Označme $u_1 = (1,1,-1,-1), u_2 = (2,3,2,-2) \in P$ a $v_1 = (2,0,1,1), v_2 = (4,4,7.-1) \in Q$. Vektor v průniku je tvaru

$$z = au_1 + bu_2 = cv_1 + dv_2.$$

Najdeme c, d řešením soustavy s maticí

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení je $(c,d) = (-p,p)$, kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr. Proto

$$P \cap Q = \{-pv_1 + pv_2 \in \mathbb{R}^4\} = [v_2 - v_1] = [(2,4,6,-2)] = [(1,2,3,-1)].$$

Báze $P \cap Q$ je tvořena vektorem $(1,2,3,-1)$.

Z předchozího výpočtu plyne, že

$$P + Q = [u_1, u_2, v_1, v_2] = [u_1, u_2, v_1],$$

kde u_1, u_2, v_1 jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi součtu.

(b) Vektor $(1,2,3,4)$ leží v $P+Q$, právě když má řešení rovnice

$$au_1 + bu_2 + cv_1 = (1,2,3,4)$$

o neznámých a, b, c. Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{55}{3} \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení, tedy $(1,2,3,4) \notin P + Q$. □

Bodování. Rovnice pro průnik **3 body**
Řešení c,d **3 body**
Báze průniku **6 bodů**
Báze součtu, ví, jak spočítat **4 body**
Výsledek **4 body**
Soustava, zda vektor leží v součtu **3 body**
Výsledek **2 body** □

Příklad. 1B. V prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory

$$U = [(1,1,-1,1),(2,1,2,0)], \quad V = [(2,0,-1,3),(5,2,0,4)].$$

(a) Najděte báze a dimenze jejich průniku [12 bodů] a součtu [8 bodů].
(b) Zjistěte pomocí výpočtu, zda vektor $(1,2,3,4)$ leží v podprostoru $U+V$. [5 bodů] Body budou uděleny jen za správné zdůvodnění.

Řešení. **(a)** Označme $u_1 = (1,1,-1,1), u_2 = (2,1,2,0) \in U$ a $v_1 = (2,0,-1,3), v_2 = (5,2,0,4) \in V$. Vektor v průniku je tvaru

$$z = au_1 + bu_2 = cv_1 + dv_2.$$

Najdeme c, d řešením soustavy s maticí

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení je $(c,d) = (-p,p)$, kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr. Proto

$$U \cap V = \{-pv_1 + pv_2 \in \mathbb{R}^4\} = [v_2 - v_1] = [(3,2,1,1)].$$

Báze $U \cap V$ je tvořena vektorem $(3,2,1,1)$.

Z předchozího výpočtu plyne, že

$$U + V = [u_1, u_2, v_1, v_2] = [u_1, u_2, v_1],$$

kde u_1, u_2, v_1 jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi součtu.

(b) Vektor $(1,2,3,4)$ leží v $U+V$, právě když má řešení rovnice

$$au_1 + bu_2 + cv_1 = (1,2,3,4)$$

o neznámých a, b, c. Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{47}{5} \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení, tedy $(1,2,3,4) \notin U + V$. □

Bodování. Rovnice pro průnik **3 body**
Řešení c,d **3 body**
Báze průniku **6 bodů**
Báze součtu, ví, jak spočítat **4 body**
Výsledek **4 body**
Soustava, zda vektor leží v součtu **3 body**
Výsledek **2 body** □

Příklad. 2A. Určete vzdálenost $\mathrm{dist}(p,q)$ přímek

$$p : [3,2,0] + a(1,1,-1) \quad \text{a} \quad q : [-1,2,6] + b(3,0,-1)$$

a body $P \in p$ a $Q \in q$ takové, že vzdálenost bodů $\mathrm{dist}(P,Q) = \mathrm{dist}(p,q)$.

Řešení. Položme $A = [3,2,0]$, $u = (1,1,-1)$, $B = [-1,2,6]$, $v = (3,0,-1)$. Rozdíl hledaných bodů $P = A + au \in p$ a $Q = B + bv \in q$ je kolmý na směrové vektory u a v obou přímek. Proto

$$\begin{aligned} \langle au - bv, u\rangle =& \langle B - A, u\rangle, \\ \langle au - bv, v\rangle =& \langle B - A, v\rangle \end{aligned}$$

To vede na soustavu pro neznámé a, b s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & -9 \\ 3 & -4 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

Řešení je $a = -2$, $b = 1$. Hledané body jsou

$$P = [3,2,0] - 2(1,1,-1) = [1,0,2], \quad Q = [-1,2,6] + (3,0,-1) = [2,2,5].$$

Vzdálenost je

$$\mathrm{dist}(p,q) = \mathrm{dist}(P,Q) = ||(1,2,3)|| = \sqrt{14}.$$

$\square$

Bodování. Teoreticky správná rovnice **6 bodů**
Číselně správná rovnice **4 body**
Řešení a, b **5 bodů**
Správné body P a Q **6 bodů**
Vzdálenost **4 body**

Při jiném postupu Kolmá projekce $B - A$ do $(Z(p) + Z(q))^{\perp}$ je $(1,2,3)$ **6 bodů**
Vzdálenost **4 body**
Správná rovnice pro pro P a Q **5 bodů**
Řešení a, b **4 body**
Správné body P a Q **6 bodů**

$\square$

Příklad. 2B. Určete vzdálenost $\mathrm{dist}(k,l)$ přímek

$$k : [0,1,4] + a(2,0,-1) \quad \text{a} \quad l : [5,4,6] + b(2,-1,1)$$

a body $K \in k$ a $L \in l$ takové, že vzdálenost bodů $\mathrm{dist}(K,L) = \mathrm{dist}(k,l)$.

Řešení. Položme $A = [0,1,4]$, $u = (2,0,-1)$, $B = [5,4,6]$, $v = (2,-1,1)$. Rozdíl hledaných bodů $K = A + au \in k$ a $L = B + bv \in l$ je kolmý na směrové vektory u a v obou přímek. Proto

$$\begin{aligned} \langle au - bv, u\rangle =& \langle B - A, u\rangle, \\ \langle au - bv, v\rangle =& \langle B - A, v\rangle \end{aligned}$$

To vede na soustavu pro neznámé a, b s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -9 & 10 \\ 0 & 21 & -21 \end{array}\right)$$

Řešení je $a = 1$, $b = -1$. Hledané body jsou

$$K = [0,1,4] + (2,0,-1) = [2,1,3], \quad L = [5,4,6] - (2,-1,1) = [3,5,5].$$

Vzdálenost je

$$\mathrm{dist}(k,l) = \mathrm{dist}(K,L) = ||(1,4,2)|| = \sqrt{21}.$$

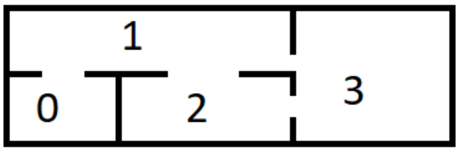
□

Bodování. Teoreticky správná rovnice **6 bodů**
Číselně správná rovnice **4 body**
Řešení a, b **5 bodů**
Správné body P a Q **6 bodů**
Vzdálenost **4 body**

Při jiném postupu Kolmá projekce $B - A$ do $(Z(p) + Z(q))^{\perp}$ je $(1,2,3)$ **6 bodů**
Vzdálenost **4 body**
Správná rovnice pro pro P a Q **5 bodů**
Řešení a, b **4 body**
Správné body P a Q **6 bodů**

□

Příklad. **3A.**



Myš vložíme do bludiště tvaru na obrázku. Myš si v každém kroku vybere náhodně (se stejnou pravděpodobností) jedny dveře vedoucí z komůrky, v které se aktuálně nachází, a přejde jimi do nové komůrky. Modelujte pohyb myši v bludišti pomocí Markovova procesu.

(a) Napište matici tohoto procesu. [8 bodů]
(b) Vysvětlete, jaký je význam koeficientu matice v 2. sloupci a 3. řádku. [4 body]
(c) Ve které komůrce se myš nachází s největší pravděpodobností po velkém počtu kroků? A s jakou pravděpodobností to je? [8 bodů]
(d) S jakou pravděpodobností se myš dostane z komůrky 2 do komůrky 3 právě třemi přechody? Počítejte pomocí maticového násobení. [5 bodů]

Řešení. **(a)** Matice tohoto procesu je

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Prvek M_{32} je pravděpodobnost, že myš přejde z komůrky 1 do komůrky 2.

(c) Spočítáme pravděpodobnostní vlastní vektor k vlastnímu číslu 1 matice M.

$$(M - E)x = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

To vede na homogenní soustavu

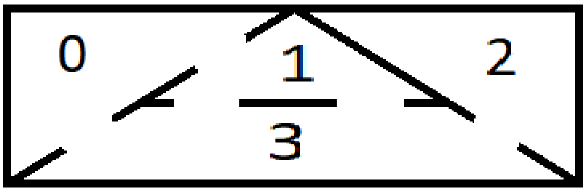
$$\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení je $x = \frac{1}{8}(1, 3, 2, 2)^T$. Tedy myš bude po velkém počtu kroků nejčastěji v komůrce 1, a to s pravděpodobností $3/8$.

(d) Hledaná pravděpodobnost je čtvrtá složka vektoru $M^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a to je $7/24$. □

Bodování. (a) Matice **8 bodů**
(b) Význam koeficientu **4 body**
(c) Rovnice **3 body**, pravděpodobnostní vektor **3 body**, správný výsledek **2 body**
(d) Ví, jak na to přes násobení matic **3 body**, výsledek **2 body** □

Příklad. 3B.



Myš vložíme do bludiště tvaru na obrázku. Myš si v každém kroku vybere náhodně (se stejnou pravděpodobností) jedny dveře vedoucí z komůrky, v které se aktuálně nachází, a přejde jimi do nové komůrky. Modelujte pohyb myši v bludišti pomocí Markovova procesu.

(a) Napište matici tohoto procesu. [8 bodů]
(b) Vysvětlete, jaký je význam koeficientu matice v 2. sloupci a 4. řádku. [4 body]
(c) Ve které komůrce se myš nachází s největší pravděpodobností po velkém počtu kroků? A s jakou pravděpodobností to je? [8 bodů]
(d) S jakou pravděpodobností se myš dostane z komůrky 0 do komůrky 1 právě třemi přechody? Počítejte pomocí maticového násobení. [5 bodů]

Řešení. **(a)** Matice tohoto procesu je

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 2/3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Prvek M_{42} je pravděpodobnost, že myš přejde z komůrky 1 do komůrky 3.

(c) Spočítáme pravděpodobnostní vlastní vektor k vlastnímu číslu 1 matice M.

$$(M - E)x = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

To vede na homogenní soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1/4 \\ 1/2 & 2/3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení je $x = \frac{1}{10}(2, 3, 1, 4)^T$. Tedy myš bude po velkém počtu kroků nejčastěji v komůrce 3, a to s pravděpodobností $4/10 = 2/5$.

(d) Hledaná pravděpodobnost je druhá složka vektoru $M^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a to je $15/48$. $\square$

Bodování. (a) Matice **8 bodů**
(b) Význam koeficientu **4 body**
(c) Rovnice **3 body**, pravděpodobnostní vektor **3 body**, správný výsledek **2 body**
(d) Ví, jak na to přes násobení matic **3 body**, výsledek **2 body** $\square$

Příklad. 4A. Najděte všechna celá čísla, která vyhovují soustavě kongruencí

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{14}, \\ 17x &\equiv 2 \pmod{35}, \\ 5x &\equiv 15 \pmod{18}. \end{aligned}$$

Celý výpočet proveďte bez použití kalkulačky nebo jakéhokoliv softwaru.

Řešení. 3. rovnici lze podělit pěti. Dostáváme jednodušší

$$x \equiv 3 \pmod{18}.$$

Vezmeme jednu rovnici, vyřešíme, dosadíme do druhé, vyřešíme, dosadíme do třetí a dostaneme celkový výsledek. Prvně počítejme modulo 35:

$$\begin{aligned} 17x &\equiv 2 \pmod{35}, \\ 34x &\equiv 4 \pmod{35}, \\ x &\equiv 31 \pmod{35}. \end{aligned}$$

Proto $x = 35a + 31$ dosadíme do prvé rovnice a počítáme modulo 14:

$$\begin{aligned} 5(35a + 31)x &\equiv 1 \pmod{14}, \\ 5(7a + 3) &\equiv 1 \pmod{14}, \\ 7a + 1 &\equiv 1 \pmod{14}, \\ 7a &\equiv 0 \pmod{14}, \text{ dělení 7}, \\ a &\equiv 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Tedy $a = 2b$ a $x = 35(2b) + 31$. Dosadíme do třetí kongruence a počítáme modulo 18:

$$\begin{aligned} 35(2b) + 31 &\equiv 3 \pmod{18}, \\ 70b + 31 &\equiv 3 \pmod{18}, \\ -2b &\equiv 8 \pmod{18}, \\ -b &\equiv 4 \pmod{9}, \text{ dělení 2}, \\ b &\equiv 5 \pmod{9}. \end{aligned}$$

Odtud $b = 9c + 5$ a dosazením do x dostaneme

$$x = 35(2(9c + 5)) + 31 = 630c + 350 + 31 = 630c + 381.$$

□

Bodování. Počítání modulo 35 za **7 bodů**
Počítání modulo 14 za **7 bodů**
Počítání modulo 18 za **7 bodů**
Správný výsledek **4 body**
Za každé chybné dělení strhnout **4 body** □

Příklad. 4B. Najděte všechna celá čísla, která vyhovují soustavě kongruencí

$$\begin{aligned} 7y &\equiv 3 \pmod{12}, \\ 13y &\equiv 15 \pmod{33}, \\ 9y &\equiv 3 \pmod{14}. \end{aligned}$$

Celý výpočet proveďte bez použití kalkulačky nebo jakéhokoliv softwaru.

Řešení. 3. rovnici lze podělit třemi. Dostáváme jednodušší

$$3y \equiv 1 \pmod{14}.$$

Vezmeme jednu rovnici, vyřešíme, dosadíme do druhé, vyřešíme, dosadíme do třetí a dostaneme celkový výsledek. Prvně počítejme modulo 33:

$$\begin{aligned} 13y &\equiv 15 \pmod{33}, \\ -20y &\equiv 15 \pmod{33}, \\ -4y &\equiv 3 \pmod{33}, \\ -32y &\equiv 24 \pmod{33}, \\ y &\equiv 24 \pmod{33}. \end{aligned}$$

Proto $y = 33a + 24$ dosadíme do prvé rovnice a počítáme modulo 12:

$$\begin{aligned} 7(33a + 24)x &\equiv 3 \pmod{12}, \\ 7(-3a) &\equiv 3 \pmod{12}, \text{ dělení 3,} \\ -7a &\equiv 1 \pmod{4}, \\ a &\equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Tedy $a = 4b + 1$ a $y = 33(4b + 1) + 24 = 132b + 57$. Dosadíme do třetí kongruence a počítáme modulo 14:

$$\begin{aligned} 3(132b + 57) &\equiv 1 \pmod{14}, \\ 3(6b + 1) &\equiv 1 \pmod{14}, \\ 4b + 3 &\equiv 1 \pmod{14}, \\ 4b &\equiv -2 \pmod{14}, \text{ dělení 2,} \\ 2b &\equiv -1 \pmod{7}, \\ b &\equiv 3 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Odtud $b = 7c + 3$ a dosazením do y dostaneme

$$y = 132(7c + 3) + 57 = 924c + 453.$$

□

Bodování. Počítání modulo 33 za **7 bodů**

Počítání modulo 12 za **7 bodů**

Počítání modulo 14 za **7 bodů**

Správný výsledek **4 body**

Za každé chybné dělení strhnout **4 body** □