

Monoids, Foldable, Traversable

IB016 Seminář z funkcionálního programování

Martin Kurečka, Adam Matoušek
(původní autoři slajdů Vladimír Štill, Martin Ukrop)

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita

Jaro 2021

Monoidy

Motivace I: zpracování argumentů příkazové řádky

Chtěli bychom zpracovat argumenty příkazové řádky jako nastavení programu.

```
./run -v -opt=o1 -q -opt=o2
```

- `-v` (*verbose*) zapíná ladicí výstupy
- `-q` (*quiet*) vypíná ladicí výstupy
- program se vždy chová podle posledního přepínače `-v/-q`
- každý výskyt `-opt` přidává programu libovolný textový argument
- výchozí nastavení je bez ladicích výstupů a bez dalších argumentů

Datový typ pro konfiguraci

Nachystejme si na nastavení vhodný datový typ:

```
data Config = Config
  { verbose :: Bool
  , options :: [String]
  } deriving (Eq, Show)
```

Představa zpracování

- každý přepínač je jedna změna oproti výchozímu nastavení
- každý přepínač reprezentuje elementární validní nastavení
- tato nastavení můžeme sloučit nějakou vhodnou funkcí

`-v` \oplus `-opt=o1` \oplus `-q` \oplus `-opt=o2`

| | | | | | | |
|----------------------|----------|-----------------------|----------|----------------------|----------|-----------------------|
| <code>def {</code> | | <code>def {</code> | | <code>def {</code> | | <code>def {</code> |
| <code>verbose</code> | | <code>options</code> | | <code>verbose</code> | | <code>options</code> |
| <code>= True</code> | \oplus | <code>= ["o1"]</code> | \oplus | <code>= False</code> | \oplus | <code>= ["o2"]</code> |
| <code>}</code> | | <code>}</code> | | <code>}</code> | | <code>}</code> |

- `def = Config { verbose = False, options = []}`
- Jaké vlastnosti by měla mít funkce \oplus ?

Vlastnosti funkce \oplus : uzavřenost

Je množina všech platných konfigurací uzavřená na funkci \oplus ?

Ano, protože:

- Funkce \oplus by měla vracet opět platné konfigurace.
 $\oplus :: \text{Config} \rightarrow \text{Config} \rightarrow \text{Config}$
- Říkáme, že se jedná o *operaci* na množině konfigurací.

Vlastnosti operace \oplus : asociativita

Záleží na pořadí zpracovávání parametrů?

$(-v \oplus -opt=o1) \oplus -q$
vs.
 $-v \oplus (-opt=o1 \oplus -q)$

Ne, pořadí zpracování by nemělo ovlivnit výslednou konfiguraci.
Říkáme, že operace \oplus je *asociativní*.

Vlastnosti operace \oplus : komutativita

Záleží na pořadí samotných parametrů?

$-v \quad \oplus \quad -opt=o1 \quad \oplus \quad -q$
vs.
 $-q \quad \oplus \quad -opt=o1 \quad \oplus \quad -v$

Ano!

- argumenty $-q$ $-v$ produkují jinou konfiguraci než $-v$ $-q$

Operace proto není *komutativní*.

Vlastnosti operace \oplus : neutrální prvek

Má operace \oplus neutrální prvek?

N \oplus -v \oplus -opt=o1 \oplus -opt=o2 \oplus N

Ne (zatím), neutrálním prvkem by měla být výchozí konfigurace.

```
def :: Config
def = Config
  { verbose = False -- yikes! /o\
  , options = []
  }
```

Jak zajistit, aby výchozí konfigurace nepřepsala případné -v?

Config: nová definice

Upravíme datový typ `Config` následovně:

```
data Config = Config
  { verbose :: Maybe Bool
  , options :: [String]
  } deriving (Eq, Show)
```

```
def :: Config
```

```
def = Config
  { verbose = Nothing
  , options = []
  }
```

- Hodnota `Nothing` \sim dosud nedefinovaný parametr `verbose`.
- Je přepsána libovolnou hodnotou `Just`.

Motivace II: průchod adresářovou strukturou

Filesystem reprezentuje stromovou strukturu adresářového systému.

```
data Filesystem = File Name Size  
                | Folder Name [Filesystem]
```

- Chtěli bychom celý strom projít a do **Map Name Size** ukládat soubory splňující zadaný regex.
- Pro každý přidáný prvek lze vytvořit jednoprvkovou **Mapu**.
- `singleton :: k -> a -> Map k a`
- `union :: Ord k => Map k a -> Map k a -> Map k a`

Vlastnosti funkce `union`

- Spojení dvou struktur (`Map k a`) vytvoří novou strukturu (`Map k a`).
 - `union :: Ord k => Map k a -> Map k a -> Map k a`
- Nezáleží na „uzávorkování“ spojení `Map` \Rightarrow asociativita
- Nezáleží na pořadí spojovaných `Map` \Rightarrow komutativita
- Prázdná struktura je neutrální prvek vůči spojení
- `empty :: Map k a`

\Rightarrow V každém uzlu lze vrátit prázdnou nebo jednoprvkovou strukturu. Pomocí operace `union` je následně všechny spojíme.

Algebraické okénko

Grupoid (M, \circ) je algebraická struktura. Sestává z nosné množiny M a binární operace $\circ: M \times M \rightarrow M$.

Pologrupa je grupoid, jehož operace je asociativní:

- Asociativita: $\forall x, y, z \in M. (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

Monoid je pologrupa s neutrálním prvkem:

- Neutrální prvek: $\exists e \in M \forall x \in M. x \circ e = e \circ x = x$

Příklady monoidů

Jsou následující struktury monoidy?

- $(\mathbb{N}, +)$, přirozená čísla se sčítáním
⇒ Ano, (komutativní) monoid.
- $(\mathbb{N}, -)$, přirozená čísla s odčítáním
⇒ Ne (není ani grupoidem).
- $(\mathbb{N}, \mathbf{min})$, přirozená čísla s minimem
⇒ Ne (neexistuje neutrální prvek), ale je pologrupa.
- $(\mathbb{N}, \mathbf{max})$, přirozená čísla s maximem
⇒ Ano, (komutativní) monoid.
- $([..], ++)$, seznamy se zřetězením
⇒ Ano, (NEkomutativní) monoid.
- $(\{f \mid f :: a \rightarrow a\}, .)$, funkce typu $a \rightarrow a$ a se skládáním
⇒ Ano, (NEkomutativní) monoid.
- $(\mathbf{Config}, \oplus)$, datový typ konfigurace s operací \oplus
⇒ Ano, (NEkomutativní) monoid!

A zpátky k Haskellu. . .

Typová třída `Semigroup`

```
class Semigroup a where
  (<>) :: a -> a -> a
  sconcat :: GHC.Base.NonEmpty a -> a
  stimes :: Integral b => b -> a -> a
```

- nejmenší nezbytná definice: `(<>)`
- musí splňovat pravidlo asociativity:
$$x \langle \rangle (y \langle \rangle z) \equiv (x \langle \rangle y) \langle \rangle z$$
- v `Prelude` jen `(<>)`, více v `Data.Semigroup`
- lze použít alternativní předdefinované implementace `stimes` pro monoidy a/nebo idempotentní operaci; např.:
`stimes = stimesMonoid`

Typová třída **Monoid**

```
class Semigroup a => Monoid a where
  mempty :: a
  mappend :: a -> a -> a -- = (<>)
  mconcat :: [a] -> a    -- = foldr mappend mempty
```

- musí splňovat pravidla:

- levá identita: `mempty <> x ≡ x`
- pravá identita: `x <> mempty ≡ x`
- asociativita: `x <> (y <> z) ≡ (x <> y) <> z`
- řetězení: `mconcat ≡ foldr (<>) mempty`

- užitečné knihovní instance v **Data.Monoid**

- ★ **Semigroup** je nadtřídou teprve od base-4.11.0.0 (GHC 8.4)

- Jak vypadá instance `Monoidu` pro seznamy?

```
instance Semigroup [a] where
```

```
    (<>) = (++)
```

```
instance Monoid [a] where
```

```
    mempty = []
```

Monoid `Maybe a`

- Jak bude vypadat instance pro `Maybe a`?

```
instance Semigroup (Maybe a) where
```

```
instance Semigroup a => Semigroup (Maybe a) where
```

```
    Nothing <> b          = b
```

```
    (Just a) <> Nothing  = Just a
```

```
    (Just a) <> (Just b) = Just (a <> b)
```

```
instance Monoid (Maybe a) where
```

```
instance Semigroup a => Monoid (Maybe a) where
```

```
    mempty = Nothing
```

- `Just` „přebíjí“ `Nothing`
- Neutrálním prvkem je `Nothing`
- Co musí splňovat typ `a`?
 - Musí se jednat o instanci třídy `Semigroup`.

Knihovně pologrupa `Last` (z modulu `Data.Semigroup`):

```
newtype Last a = Last { getLast :: a }
instance Semigroup (Last a) where
  _ <> b = b
```

- Lze zúplnit na monoid obalením v `Maybe`.
- Analogicky existuje `First` a, kde `(<>) = const`.

Pozor.

- neplést s knihovněm *monoidem* `Data.Monoid.Last`:
`newtype Last a = Last { getLast :: Maybe a }`
- zanedlouho bude z knihovny odstraněn
- doporučení: `import Data.Monoid hiding (First, Last)`

Další knihovní monoidy

Existuje-li více monoidů nad jedním typem, používá se **newtype**:

- **Num** a => (**Product** a) – monoid vzhledem k násobení
- **Num** a => (**Sum** a) – monoid vzhledem ke sčítání
- **Any** – (**Bool**, ||); **All** – (**Bool**, &&)
- (**Ord** a, **Bounded** a) => (**Max** a) – monoid vzhledem k operaci maximum
- (**Ord** a, **Bounded** a) => (**Min** a) – monoid vzhledem k operaci minimum
- (**Monoid** a, **Monoid** b) => (a, b) – kartézský součin monoidů a a b

★ **newtype** **Endo** a = **Endo** { appEndo :: a -> a }

Řešení příkladu I

Původní:

```
data Config = Config
  { verbose :: Bool
  , options :: [String]
  } deriving (Eq, Show)
```

Nové:

```
type Config' = (Maybe (Last Bool), [String])
```

★ Zkuste napsat řešení pomocí `Endo Config`.

Foldable

Typová třída `Foldable`

```
class Foldable t where
  foldr :: (a -> b -> b) -> b -> t a -> b
  foldMap :: Monoid m => (a -> m) -> t a -> m
  fold :: Monoid m => t m -> m
```

- Nejmenší nezbytná definice: `foldMap` | `foldr`.
- Kontejner, který lze lineárně projít a hodnoty „splácnout“.
- Nemusí splňovat žádné rovnosti (na rozdíl od jiných základních tříd).
- Definováno v `Prelude`, další funkce v `Data.Foldable`.

foldMap vs. foldr

- Obě funkce jsou ekvivalentní
 - `foldMap` :: `Monoid m => (a -> m) -> t a -> m`
 - `foldr` :: `(a -> b -> b) -> b -> t a -> b`
- Je zřejmé jak vytvořit `foldMap`, pokud je `foldr` definováno.
- Jak vytvořit `foldr` pomocí `foldMap`?
 - Stačí přezávkovat typ `foldr`.
 - `(a -> b -> b) -> b -> t a -> b`
→ `(a -> (b -> b)) -> t a -> (b -> b)`
 - Víme že funkce `b -> b` tvoří monoid – v knihovně typ `Endo`.

⇒ celý koncept „foldování“ lze definovat v řeči monoidů.

- `Foldable` popisuje způsob procházení.
- `Monoid` popisuje způsob skládání hodnot.

Definice pro `BinTree`

```
instance Foldable BinTree where
  foldMap f (Node a l r) = f a <> foldMap f l <>
    ↪ foldMap f r
  foldMap _ Leaf = mempty
```

Pozor! Obecný *fold* připojuje vždy jen jednu hodnotu.

Tj. ke každé struktuře se chová jako k seznamu.

Tj. `foldr` má v argumentu ve skutečnosti jen binární funkci `f` (na rozdíl od `treeFold` z kurzu IB015).

Automaticky získáme mnoho třídních funkcí:

- `foldl :: (b -> a -> b) -> b -> t a -> b`
- `foldl' :: (b -> a -> b) -> b -> t a -> b`
 - Operátor je aplikován striktně.
- `toList :: t a -> [a]`
- `null :: t a -> Bool`
- `length :: t a -> Int`
- `elem :: Eq a => a -> t a -> Bool`
- `maximum, minimum :: Ord a => t a -> a`
- `sum, product :: Num a => t a -> a`

Základní definice funkcí nemusí být nutně optimální. Například `elem` pro `Map` je předefinován.

Traversable

Motivace III: vyhodnocení IO operací

Mějme **Foldable** a **Functor** kontejner (např. `[]`), do kterého chceme načíst hodnoty uživatele.

- Začínáme se seznamem `[String]` obsahujícím otázky.
- V každém uzlu seznamu můžeme vytvořit akci typu **IO String**, která vypíše otázku a načte odpověď.
 - Využíváme toho, že `[]` je funktor.
- Potřebovali bychom vytvořit jedinou akci typu **IO [String]**.
- To se nám nepodaří, pokud nevyužíváme dalších vlastností **IO**.

- `fmap` zachovává strukturu, hodnoty spolu neinteragují.
- `foldMap` nezachovává strukturu, hodnoty spolu interagují.
- Potřebujeme funkci, která umí obojí.

Typová třída `Traversable`

```
class (Functor t, Foldable t) => Traversable t where
  traverse :: Applicative f =>
    (a -> f b) -> t a -> f (t b)
  sequenceA :: Applicative f =>
    t (f a) -> f (t a)
```

- Minimální definice `traverse` | `sequenceA`.
- Kontejner na data typu `a`, kterým lze projít a zachovat strukturu dat.
- Definováno v `Prelude`, další funkce v `Data.Foldable`.

Musí platit rovnosti, které kontroluje programátor

- Obě funkce by se měly chovat hezky k transformacím **Applicative** (tj. funkce respektující `<*>`).
- Pokud je funktor `f` identita (**Identity**), pak by se měla `sequenceA` chovat jako identita a `traverse` by nemělo měnit strukturu kontejneru `t`.
- Přesné rovnosti v dokumentaci.

Definice pro seznam

```
instance Traversable [] where
  traverse :: ... => (a -> f b) -> [a] -> f [b]
  traverse f (x:xs) =
    liftA2 (:) (f x) (traverse f xs)
  traverse _ [] = pure []

  traverse' f (x:xs) = do
    h <- f x
    rest <- traverse f xs
    return $ h : rest
  traverse' _ [] = pure []
```

Definice pro binární stromy

```
instance Traversable BinTree where
  traverse :: ... => (a -> f b) -> BT a -> f (BT b)
  traverse f (Node a l r) =
    liftA3
      Node
      (f a)
      (traverse f l)
      (traverse f r)
  traverse _ Leaf = pure Leaf
```

★ Souvislost s **Foldable**

- Není vidět spojení s **Foldable**.
- Existuje instance **Applicative**, která se chová jako akumulátor \rightarrow můžeme definovat **foldMap** pomocí **traverse**.
- Aplikativní funktor **Const** m .
- Podobá se již zmiňované monádě písáře (**[]**, **,**), která má akumulátor v první složce.
- **Const** $m \sim (m, ())$

★ Aplikativní funktor `Const m`

```
newtype Const a b = Const { getConst :: a }
```

```
instance Functor (Const a) where  
  fmap f (Const a) = Const a
```

```
instance Monoid a => Applicative (Const a) where  
  pure _ = Const mempty  
  Const x <*> Const y = Const (x `mappend` y)
```

```
foldMap :: (...) => (a -> m) -> t a -> m  
foldMap f = getConst . traverse (Const . f)
```

Užitečné funkce

- `sequence :: Monad m => t (m a) -> m (t a)`
 - Stejně jako `sequenceA` pro monády – historický relikv.
- `mapM :: Monad m => (a -> m b) -> t a -> m (t b)`
 - Stejně jako `traverse` pro monády.
- `traverse_ :: (Applicative f, Foldable t) => (a -> f b) -> t a -> f ()`
- `sequence_ :: (Applicative f, Foldable t) => t (f a) -> f ()`
 - Jako odpovídající funkce, ale zapomínají výsledek.
 - Tj. jenom spouští dané akce (např. IO).
 - Nepotřebují si pamatovat strukturu \rightarrow `t` nemusí být `Traversable`.

★ Automatické odvozování instancí

U některých typů jsou instance „jasné“, „triviální“ a „mechanické“.

Příklad: instance monoidu pro součin monoidů:

```
data Config = Config { verbose :: Maybe (Last Bool)
                      , options :: [String]
                      } -- deriving Monoid :(
(Config v1 o1) <> (Config v2 o2) = Config (v1 <> v2) (o1 <> o2)
mempty = Config mempty mempty
```

- GHC zavádí typovou třídu **Generic**.
- Rozšíření `DeriveGeneric` umožňuje odvodit její instanci
- Balík `generic-deriving` umožňuje z instance **Generic** odvodit instance některých tříd, mj. monoidu či **Traversable**.
- ★ Existují i další rozšíření umožňující odvozování instancí.