6. cvičení z MB141, jaro 2021

Je potřeba udělat všechny příklady, na složitější příklady 5 a 6 je potřeba si ponechat dostatek času. Řešte je způsobem vyloženým na 6. přednášce bez počítání charakteristického polynomu a komplexních vlastních čísel. Příklad 4 řešte tak, že najdete obrazy tří lineárně nezávislých vektorů.

Příklad. 1. Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$S = [(1, 2, -1, 3, 1),\ (5, 2, -1, 7, 1),\ (2, -1, 2, -4, -2)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem. Použijte k tomu prvně Gram-mův-Schmidtův ortogonalizační proces a potom získané vektory ortogonální báze vynormujte (tj. vydělte jejich velikostí, abyste získali vektory velikosti 1).

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$M = [(1, 2, -1, -3, 3),\ (1, -2, 3, 1, -1)]\,.$$

Příklad. 3. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2, 11, -3, -4, 7)$ do podprostoru M a jeho ortogonálního doplňku $M^{\perp}$ z předchozího příkladu.

Příklad. 4. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 5. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 6. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$