Měření propustnosti sítě

Petr Holub

PB156cv
2021–03–22

Cíle cvičení

- Získat zpětnou vazbu na tvorbu protokolů na základě protokolů odevzdaných po minulém cvičení.
- Získat zkušenosti se základním testováním výkonu sítě.
- Vyzkoušet si základy aplikované statistiky pro vyhodnocování výsledků.

Odevzdané protokoly

Co by měl protokol obsahovat?

- **Vše co je nezbytné k reprodukování experimentu:**
  - písemná formulace hypotézy/otázky,
  - dokumentace návrhu experimentu,
  - dokumentace provedení experimentu vč. podmínek, které by mohly mít vliv na výsledky,
  - dokumentace analýzy dat,
  - vyvození závěrů.

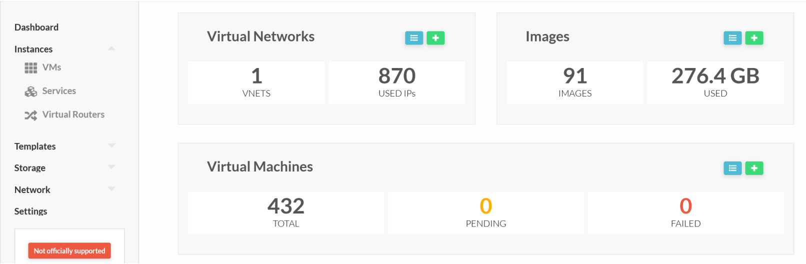
Konfigurace počítačů

Práce s virtuálními stroji

- Každý bude mít přiřazené 2 virtuální stroje
- Správa přes `https://stratus.fi.muni.cz/`
  - přihlášení přes fakultní login/heslo
  - možnost startu/restartu stroje, připojení přes VNC konzolu v prohlížeči
  - root heslo `unixfi_provided`
  - stroje se automaticky restartují to výchozího nastavení mezi 23:00 a 02:00

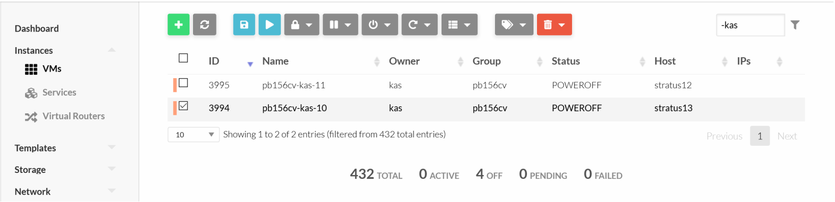
Práce s virtuálními stroji

- Každý bude mít přiřazené 2 virtuální stroje
- Správa přes `https://stratus.fi.muni.cz/`



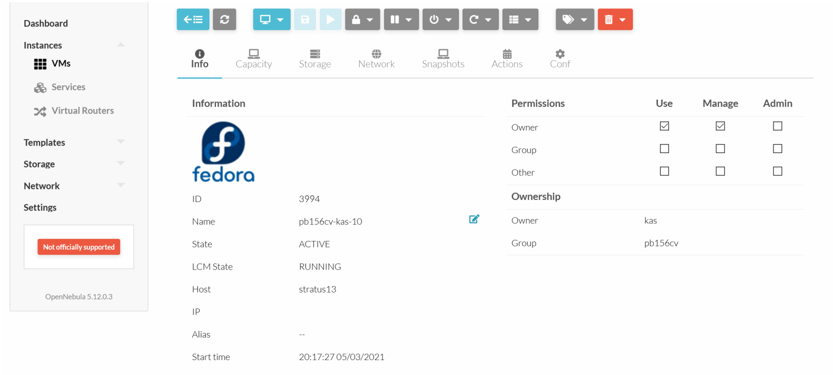
Práce s virtuálními stroji

- Každý bude mít přiřazené 2 virtuální stroje
- Správa přes `https://stratus.fi.muni.cz/`



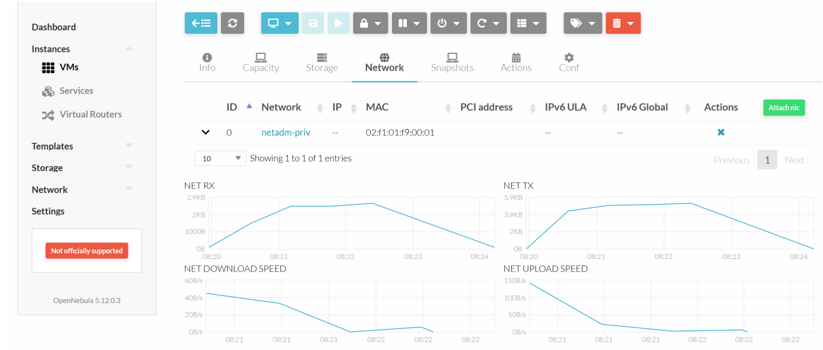
Práce s virtuálními stroji

- Každý bude mít přiřazené 2 virtuální stroje
- Správa přes `https://stratus.fi.muni.cz/`



Práce s virtuálními stroji

- Každý bude mít přiřazené 2 virtuální stroje
- Správa přes `https://stratus.fi.muni.cz/`



Práce s virtuálními stroji

- Gateway `ssh netadm-gw.fi.muni.cz`
  - potřeba být v univerzitní síti – VPN
    `https://it.muni.cz/sluzby/vpn`
  - přihlášení přes fakultní login/heslo
  - dohledání VM podle ARP

```
$ ssh xholub2@netadm-gw.fi.muni.cz
xholub2@netadm-gw.fi.muni.cz's password:
|
| Hosted at Stratus.fi.muni.cz. Cloud platform provided by unix@fi.muni.cz.
|
Last login: Sat Mar  6 09:36:07 2021 from 147.251.55.142

[xholub2@netadm-gw ~]$ arp -a | fgrep 02:f1:01:f9:00:01
? (10.0.1.10) at 02:f1:01:f9:00:01 [ether] on eth1
[xholub2@netadm-gw ~]$
```

Práce s virtuálními stroji

- Přiřažení virtuálů najdete také v poznámkovém bloku v ISu
- **Nezapomeňte vypnout firewalld** na obou strojích
  `service firewalld stop`
  - Pokud uvidíte chybu typu `Error: connect: No route to host` a přitom `ping` funguje, tak jste na to nejspíše zapomněli ;)

Využití SSH tunelu

- Možnost postavit si SSH tunel

```
ssh -L 2222:10.0.yy.10:22 xlogin@netadm-gw.fi.muni.cz
```

  - za 2222 doplňte libovolný volný port
  - za yy si doplňte svoji podsít – a tohle nechejte běžet – zbytek ve druhém terminálu

```
ssh -p 2222 root@localhost touch /tmp/soubor
scp -P 2222 localhost:/tmp/soubor  .
```

Měření end-to-end propustnosti sítě

Trocha "teorie"

- Omezení propustnosti spojů
- Omezení propustnosti síťových prvků
- Omezení propustnosti koncových zařízení
- Závislost na velikosti paketů

Provádění měření

- iperf UDP

```
iperf -s -u -i 1 -l 8500
iperf -u -c hostname -i 1 -l 8500 -b 10M
```

- iperf TCP

```
iperf -s -i 1 -w 8M
iperf -c hostname -i 1 -w 8M
```

- netperf UDP

```
netserver -n 4
netperf -H 10.0.10.1 -n 4 -t UDP_STREAM -- -s 8M -S 8M -m nnnn -M nnnn
```

- netperf TCP

```
netserver -n 4
netperf -H 10.0.10.1 -n 4 -t TCP_STREAM -- -s 8M -S 8M -m nnnn -M nnnn
```

Provádění měření

- nuttcp – trocha zábavy:

```
for h in 1.2.3.4 2.3.4.5; do for j in r t;
        do echo "";
        if [ "$j" = "r" ]; then echo "From $h to server";
        else echo "From server to $h"; fi;
                (for i in 200 400 600 800;
                        do ./nuttcp -i5 -T10 -u -R${i}M -v -v \
                                -${j} ${h};
                done ) | fgrep loss ;
        done;
done
```

Základy zpracování v R I

- Použijte buď samotné R[1] nebo RStudio[2]
- Jak instalovat balíky:

```
install.packages("plyr")
install.packages("tidyverse")
install.packages("Rmisc")
install.packages("kSamples")
install.packages("anomalize")
```

- Nahrání dat např.

```
nut <- scan("run1/nuttcp-forth-128.values", what=numeric())
```

Základy zpracování v R II

- Řetězení zpracování pomocí tidyverse

```
s <- c("32", "64", "128", "256", "512", "1024")
file_names <- paste0("run1/nuttcp-forth-", s, ".values")
nuts <- t(do.call(rbind,lapply(file_names,scan,what=as.numeric())))
colnames(nuts) <- s
nuts <- data.frame(nuts)
nuts %>% slice(2:n()) %>% lapply(CI)
nuts %>% lapply(shapiro.test)
```

[1] https://www.r-project.org/

[2] https://rstudio.com/

Testy normality rozdělení

- test normality Shapiro-Wilk

```
> shapiro.test(nut)
W = 0.63028, p-value = 4.978e-11
> shapiro.test(nut[2:60])
W = 0.98598, p-value = 0.7302
```

- nulová hypotéza: rozdělení je normální
- pokud je *p*-hodnota < .05, hypotézu zamítneme
- pokud je *p*-hodnota > .05, hypotézu nemůžeme zamítnout
- proč je hranice *p*-hodnoty 0.05?

Charakterizace rozdělení I

- Průměrování a konfidenční interval se typicky počítá s předpokladem normálního rozdělení. Pro charakterizaci nenormálních rozdělení je lépe používat medián a kvantily:

```
> summary(nut)
Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
64.49   64.49   64.49   64.50   64.50   64.52
> CI(nut)
upper      mean     lower
64.49631 64.49523 64.49415 > quantile(nut, prob = seq(0, 1, length = 21))
0%       5%       10%      15%      20%      25%      30%      35%
64.48900 64.49099 64.49209 64.49265 64.49318 64.49340 64.49357 64.49367
40%      45%      50%      55%      60%      65%      70%      75%
64.49422 64.49446 64.49470 64.49495 64.49512 64.49580 64.49610 64.49638
80%      85%      90%      95%     100%
64.49672 64.49748 64.49842 64.49882 64.52190
```

Porovnání rozdělení I

- Mějme 3 experimenty vzorkující data (nut, nut2, nut3)
- Nulová hypotéza: data pochází ze stejného rozdělení
- Neparametrické testy v případě, že máme/můžeme mít nenormální rozdělení
- Test Kolmogorov-Smirnov (K-S):

```
> ks.test(nut,nut2)

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  nut and nut2
D = 0.083333, p-value = 0.9853
alternative hypothesis: two-sided

Warning message:
In ks.test(nut, nut2) : cannot compute exact p-value with ties
```

Porovnání rozdělení II

- Test Anderson-Darling (A-D):
  - A-D více zohledňuje konce rozdělení

```
> library("kSamples")
> ad.test(nut,nut2,nut3)
Number of samples:  3
Sample sizes:  60, 60, 60
Number of ties: 100

Mean of  Anderson-Darling  Criterion: 2
Standard deviation of  Anderson-Darling  Criterion: 1.06249

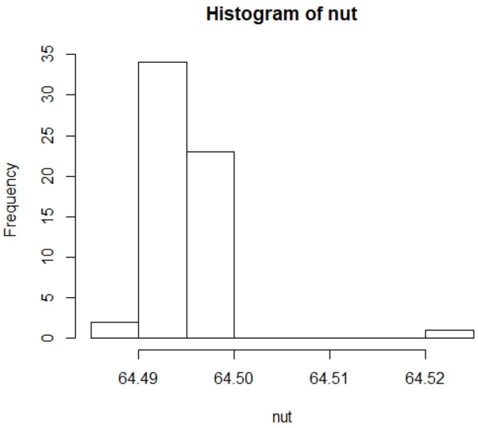
T.AD = ( Anderson-Darling  Criterion - mean)/sigma

Null Hypothesis: All samples come from a common population.

AD   T.AD  asympt. P-value
version 1: 0.6283 -1.291          0.9888
version 2: 0.5950 -1.322          0.9922
```

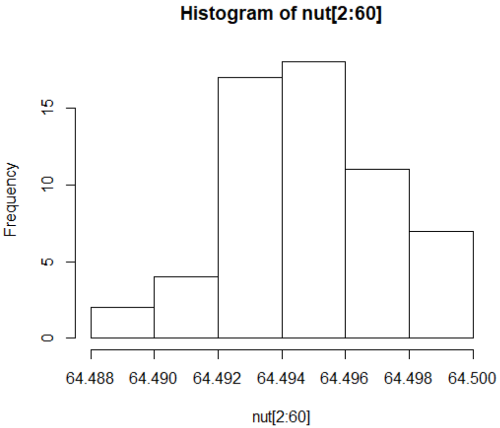
Vizuální kontrola I

- Histogram



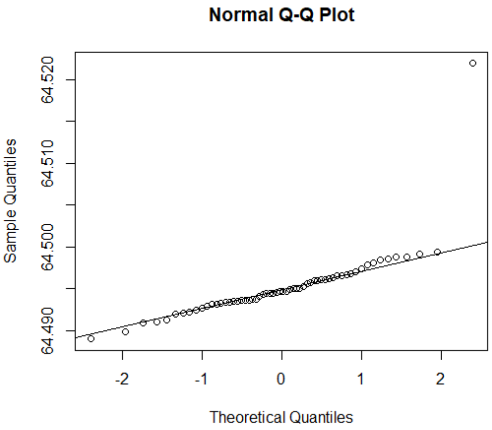
Vizuální kontrola II

- Histogram po odstranění hrubé chyby



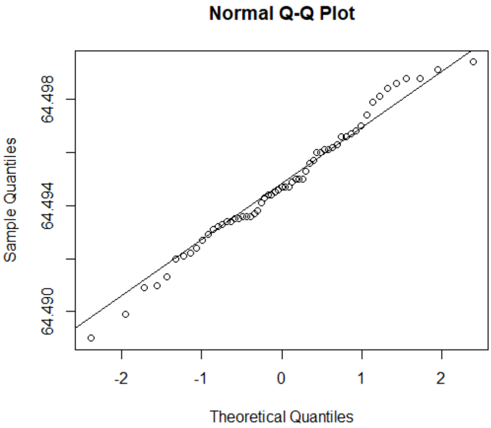
Vizuální kontrola III

- Q-Q



Vizuální kontrola IV

- Q-Q po odstranění hrubé chyby



Zadání I

- Experiment budete provádět a protokol zpracovávat samostatně.
- Připojte dva notebooky k 100Mbps přepínači
- Nastavte pevně danou IPv4 adresu na ethernetovém rozhraní
  - `service network-manager stop`
  - `ifconfig`
    zjistěte si jméno rozhraní
  - `ifconfig rozhrani adresa/24`
    přičemž použijete privátní adresy z rozsahu 192.168.0.0/16 a domluvíte se mezi sebou na jednom přepínači, abyste si nepřidělili duplicitní adresy
- Na jednom z počítačů nastartujte nuttcp server
  - `nuttcp -S`
- Na druhém spusťte měření propustnosti UDP v závislosti na velikosti paketů pro velikosti bufferu 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 1500 v obou směrech (meření v opačném směru zajišťuje přepínač -r):
- Všiměte si, co se stalo pro velikosti < 32 a > 1448 a v protokolu vysvětlete.
- Zvažte použití automatizace shellovým skriptováním, např.:

Zadání II

- ```
  for delka in 16 32 64 128 256 512 1024 1500; do \
  nuttcp -u -l ${delka} -R100M -i -T20 cil_ip >nuttcp-${delka}.log; done
  ```

- Měření celkem 3× zopakujte pro ověření stability výsledků. Zamyslete se, co byste měli správně provést, abyste provedli nezávislá měření (m.j. systém uvedli do výchozího stavu).
- Stáhněte si dosažené výsledky.
  ```

Protokol I

Každý samostatně zpracuje a odevzdá protokol.

- Výsledkem měření propustností jsou časové řady: 60 s běhy jsou rozděleny na 1 s intervaly. Data z logu můžete extrahovat např. takto:

```
for i in *.log; do cat $i | perl -pe 's/^.*\s+(\d+\.\d+)\sMbps\s+.*$/\1/' |
head -n -2 >${i%%.log}.values; done
```

- Načtěte časové řady do R, např.

```
nut <- scan("run1/nuttcp-128.values", what=numeric())
```

Protokol II

- *Hypotéza: časové řady mají normální rozdělení.* Lze nebo nelze tuto hypotézu vyvrátit pomocí Shapiro-Wilkova testu normality?

  `shapiro.test(nut)`

  Srovnejte vizuálně s histogramem a Q-Q diagramem:

  `hist(nut)`

  `qqnorm(nut); qqline(nut)`
- Lze-li tuto hypotézu vyvrátit, dokážete ji vyvrátit i v případě, pokud se do měření nezahrnou hodnoty, které byly naměřeny při současně registrovaných výpadcích – tedy hodnoty zatížené hrubou chybou (outliers)? Jde-li pouze o první hodnotu (častý případ – ale ověřte!), můžte jednoduše použít výběr `nut[2:60]`.

Protokol III

- *Hypotéza: propustnost síťové karty a sítě nezávisí na velikosti paketů.* Lze tuto hypotézu vyvrátit nebo nelze? Zdůvodněte. Pokud jsou rozdělení přibližně normální, využijte průměrné hodnoty měření pro jednotlivé velikost paketů s odhadnutou chybou měření při zvolené hranici intervalu spolehlivosti (např. 95%). V opačném případě použijte medián s uvedením rozsahu 1.–3. kvartilu. Příklad v R pro normální rozdělení:

  `library("Rmisc")` – příp. `install.packages("Rmisc")`, pokud je třeba instalace

  ```
  CI(nut, ci=.95)
  ```

  a pro jiné než normální rozdělení

  ```
  summary(nut)
  quantile(nut, prob = seq(0, 1, length = 21))
  ```

Protokol IV

- *Hypotéza: opakovaná měření poskytují výsledky vzorkované ze stejného rozdělení.* Lze tuto hypotézu vyvrátit nebo nelze? Zdůvodněte. Můžete využít např. Anderson-Darling k-vzorkového testu.

  ```
  library("kSamples")
  nut <- scan("run1/nuttcp-forth-128.values", what=numeric())
  nut2 <- scan("run2/nuttcp-forth-128.values", what=numeric())
  ad.test(nut,nut2)
  ```

- *Všechny presentované výsledky musí být řádně zaokrouhleny a musí být uvedeny jednotky měření.*

Zpracování experimentálních dat

Délka zpracování obrázku

velikost obrázku	*čas běhu*
640×480	124,12983930928
1280×720	539,98450298239
1920×1080	1529,02398429008
4096×2160	10210,09238488922

velikost obrázku	*čas běhu*
640 × 480	124,12983930928
1280 × 720	539,98450298239
1920 × 1080	1529,02398429008
4096 × 2160	10210,09238488922

Měříme délku výpočtu v Javě

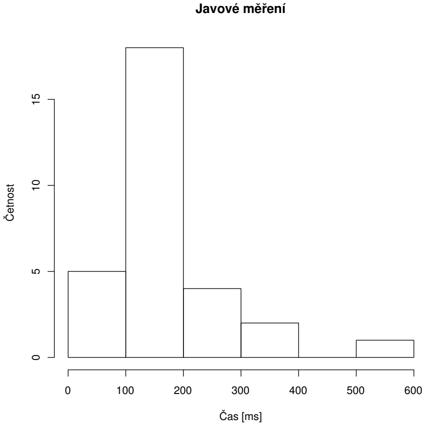
```
~$ R

...

> library(psych)
> runlength <- read.csv(file="java-example.table", head=FALSE, sep=",")
> summary(runlength$V1)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  92.08  104.70  108.80  166.80  187.20  594.70
> describe(runlength$V1)
  var  n   mean     sd median trimmed   mad   min    max  range skew
1   1 30 166.82 113.67 108.78   142.1 20.88 92.08 594.71 502.63 2.14
  kurtosis    se
1     4.55 20.75
```

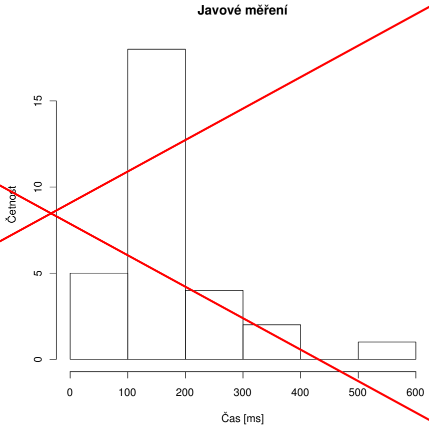
$$N = 30$$
$$\overline{x} = 166{,}82$$
$$sx = 113{,}67$$
$$s_{\overline{x}} = \frac{sx}{\sqrt{N}} = 20{,}75$$
$$t_{0{,}05;29} = 2{,}045$$

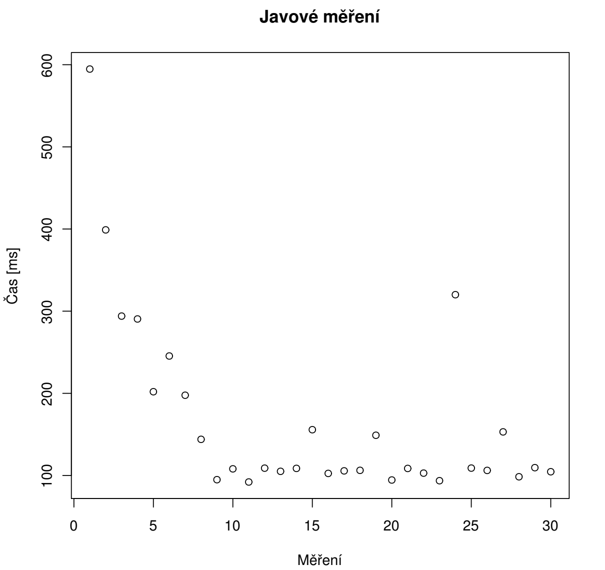
$$\overline{x} \pm t_{0{,}05;N-1} s_{\overline{x}} = 167 \pm 42\,\mathrm{ms}$$

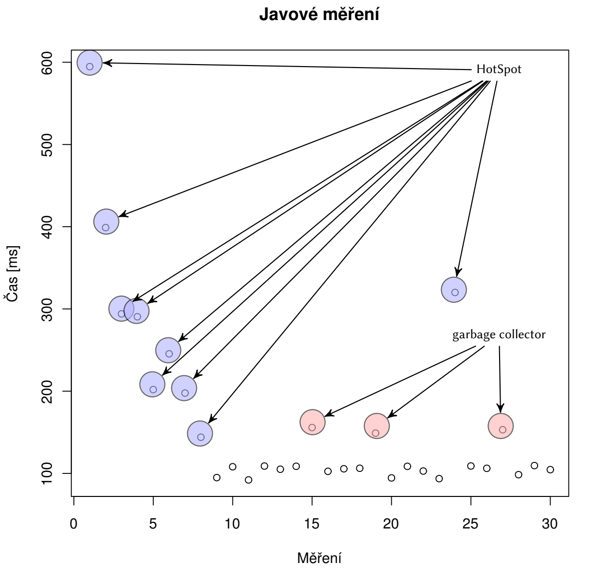


$$N = 30$$
$$\overline{x} = 166{,}82$$
$$sx = 113{,}67$$
$$s_{\overline{x}} = \frac{sx}{\sqrt{N}} = 20{,}75$$
$$t_{0{,}05;29} = 2{,}045$$

$$\overline{x} \pm t_{0{,}05;N-1} s_{\overline{x}} = 167 \pm 42\,\text{ms}$$




Javové měření
Čas [ms]
Měření
100
200
300
400
500
600
0
5
10
15
20
25
30


Javové měření
HotSpot
garbage collector
Čas [ms]
Měření
100
200
300
400
500
600
0
5
10
15
20
25
30

Soustava jednotek pro informatiky

- Předpony nejen speciálně informatické

yocto-	10^{-24}	y	–	–	–
zepto-	10^{-21}	z	–	–	–
atto-	10^{-18}	a	–	–	–
femto-	10^{-15}	f	–	–	–
pico-	10^{-12}	p	–	–	–
nano-	10^{-9}	n	–	–	–
micro-	10^{-6}	μ	–	–	–
milli-	10^{-3}	m	–	–	–
kilo-	10^{3}	k	kibi	2^{10}	Ki
mega-	10^{6}	M	mebi	2^{20}	Mi
giga-	10^{9}	G	gibi	2^{30}	Gi
tera-	10^{12}	T	tebi	2^{40}	Ti
peta-	10^{15}	P	pebi	2^{50}	Pi
exa-	10^{18}	E	exbi	2^{60}	Ei
zetta-	10^{21}	Z	zebi	2^{70}	Zi
yotta-	10^{24}	Y	yobi	2^{80}	Yi

Amendment 2 to “IEC 60027-2: Letter symbols to be used in electrical technology – Part 2: Telecommunications and electronics” (1999)

Typy měřících metod

- Subjektivní × objektivní metody
  - subjektivní: působí bezprostředně na lidské smysly
  - objektivní: působí na měřící zařízení
- Přímé × nepřímé metody
  - přímé: přímé srovnání se známou hodnotou veličiny
  - nepřímé: na základě jiných veličin, pomocí nichž lze měřenou veličinu spočítat
- Absolutní × relativní metody
  - absolutní: měření přímo v příslušné jednotce
  - relativní: měření srovnáním
- Statické × dynamické metody
  - statické: z klidového stavu přístroje
  - dynamické: na základě dynamiky měřícího přístroje

Výsledky měření

- Rozlišení měření
- Chyby měření
  - skládání většího počtu mikroskopických jevů
  - subjektivní vliv u měřících metod
- Jedno číslo zdaleka nepostihuje tyto informace

Výsledky měření

$$x = (\hat{\mu}_x \pm z_x)\ [\text{jednotka}]$$

- $\hat{\mu}_x \ldots$ nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny
- $z_x \ldots$ interval spolehlivosti / přesnost
- jak tyto věci spočítat / odhadnout?
  - u normálního rozdělení chyb?
  - u jiného než normálního rozdělení chyb? jak takové rozdělení poznat?

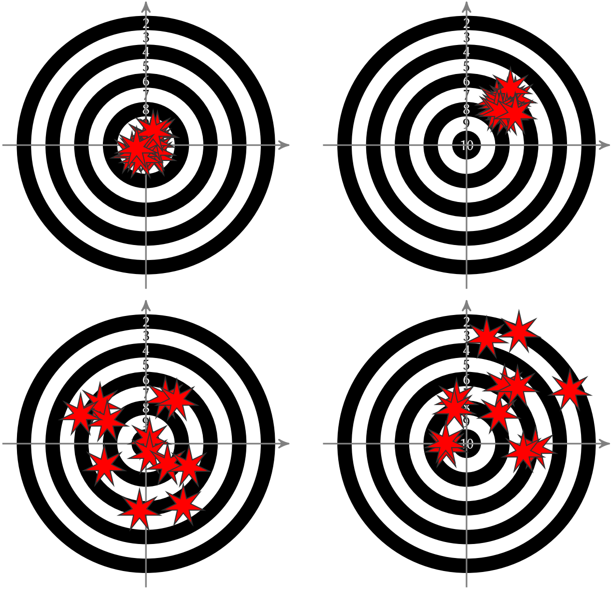
Výsledky měření

- Protokolování podmínek, na nichž měření probíhalo
  - zachycení všech podmínek, které mohou mít na měření vliv
    - konfigurace hardware
    - popis síťové topologie
    - instalovaný operační systém
    - instalovaný software
    - popis konfigurace a souběžně běžících procesů
    - uschování vlastního měřeného software/hardware
    - přesný popis použitých měřících metod
    - přesná identifikace měřících nástrojů/přístrojů
  - důležité pro reprodukovatelnost měření

Chyby měření

- Klasifikace chyb podle místa vzniku
  - instrumentální (přístrojové) chyby
  - metodické chyby
  - teoretické chyby (principy, model)
  - chyby zpracování
- Klasifikace chyb podle původu
  - hrubé (omyly)
  - systematické
  - náhodné

Chyby měření



Chyby měření dle norem

- Metrologické normy

ČSN 01 0250	Statistické metody v průmyslové praxi. Všeobecné základy
ČSN 01 0251	Vzájemná shoda výsledků zkušebních metod. Stanovení opakovatelnosti a reprodukovatelnosti normalizované zkušební metody pomocí mezilaboratorních zkoušek
ČSN 25 0008	Metrológia. Chyby primárnych etalónov. Spôsoby vyjadrovania
ČSN 25 1202	Posuvná měřidla. Technické požadavky
ČSN 25 1401	Mikrometrická měřidla na vnější měření. Technické požadavky
ČSN 25 8304	Provozní termoelektrické snímače teploty
ČSN 25 8305	Prevádzkové termoelektrické snímače teploty. Metody skúšania pri úradnom overování
ČSN 25 8306	Provozní odporové snímače teploty
ČSN 25 8307	Prevádzkové odporové snímače teploty. Metody overovania
ČSN 35 6505	Elektronické měřicí přístroje. Všeobecné technické podmínky

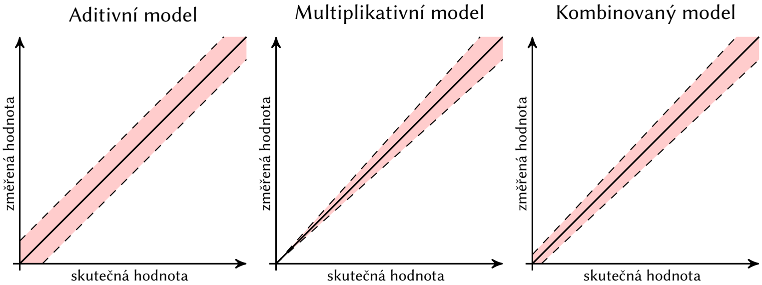
… a mnoho dalších

Přesnost měřících nástrojů

Přesnost přístroje … náhodná chyba

Správnost přístroje … systematická chyba

- Aditivní vs. multiplikativní chyby
- Mezní hodnota chyb
- Třída přesnosti přístroje



Hrubé chyby

- Např. měříme něco jiného, než co máme měřit, nebo chyba při ručním odečtu měření
  - eliminace vhodným návrhem experimentu a jeho pečlivým provedením
- Volba měřící metody / měřících metod – příklad pro Javu
  - Problém garbage collection
    - `-verbose:gc`
    - krátká měření: vybrat pouze běhy, v nichž nedošlo ke GC
    - dlouhé běhy: dostatečně dlouhé, aby se přítomnost GC projevila representativně
  - Problém HotSpot kompilace
    - `-XX:+PrintCompilation`
    - dostatečný warm-up (minuty!)
    - mohou se vyskytovat rekompilace (optimalizace, nahrání nové třídy která zruší dosavadní předpoklady)
    - housekeeping tasks: oddělení nesouvisejících měření pauzou nebo restartem JVM

Náhodné chyby

aneb proč se běžně pracuje s normálním rozdělením chyb?

- Hypotéza elementárních chyb [?]
  - každá náhodná chyba v měření je složena z řady malých chyb
  - při velkém počtu měření se vyskytne zhruba stejný počet chyb kladných i záporných a malé chyby jsou početnější než velké

  1. *m* elementárních náhodných vlivů
  2. každý elementární vliv generuje chybu α (dále označováno jako případ *a*) nebo $-\alpha$ (dále případ *b*)
  3. chyby *a* a *b* jsou stejně časté

  - dostáváme binomické rozdělení kumulace vlivů elementárních chyb
  - konverguje k normálnímu rozdělení pro velký počet malých chyb
- Centrální limitní věta
  - rozdělení součtu vzájemně nezávislých veličin X_i konverguje k normálnímu rozdělení i v případě, že veličiny X_i nemají stejné rozdělení pravděpodobnosti

Studentovo rozdělení t

- Používá se pro aproximaci normálního rozdělení při malém vzorku (neznámé směrodatné odchylky)

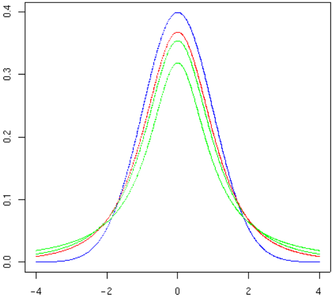
$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

kde ν je počet stupňů volnosti.

  - odhad průměrů a chyby
  - t-test – odlišení průměrů

Studentovo rozdělení t

Srovnání s normálním rozdělením (modré)
počet stupňů volnosti $\nu = 3$

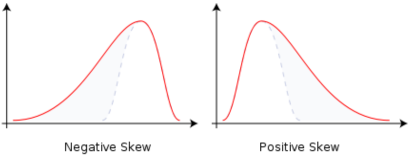


Zdroj: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:T_distribution_3df.png`

Normalizace rozdělení chyb

- Ověření normality rozdělení
  - vizuální
  - šikmost vzorku (sample skewness)

$$g_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right)^{3/2}}$$



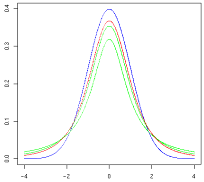
Zdroj: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Skewness_Statistics.svg`

Normalizace rozdělení chyb

- Ověření normality rozdělení
  - špičatost vzorku (sample kurtosis)

$$g_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1} N(x_i - \overline{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1} N(x_i - \overline{x})^2\right)^2} - 3$$

lehké konce (leptokurtic), $g_2 > 0$ $\times$ těžké konce (platycurtic), $g_2 < 0$



Zdroj: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:T_distribution_3df.png`

Normalizace rozdělení chyb

- Techniky normalizace
  - šikmá rozdělení $g_1 > 0$: transformace hodnot
    - $\sqrt[n]{x}$
    - $\log(x)$
    - $\frac{1}{x}$
  - šikmá rozdělení $g_1 < 0$: převrácení hodnot (reflection)
    - $-x + c$ s vhodně zvolenou konstantou c
  - špičatá rozdělení: problém
  - další čtení: [?]

Odhad spolehlivosti

$$x = (\hat{\mu}_x \pm z_x)\ [\text{jednotka}]$$

Statistická definice [?]: Je-li výsledek měření $\hat{\mu}_x$ a z_x je chyba tohoto měření odpovídající míře jistoty p, pak skutečná hodnota měřené veličiny leží v intervalu $(\hat{\mu}_x \pm z_x)$ s pravděpodobností p.

- Intervaly
  - 0,68 – střední kvadratická chyba
  - 0,95
  - 0,99 – krajní chyba
- Zaokrouhlování
  - z_x na 1 platné místo, nejvýše na 2 platná místa
  - $\hat{\mu}_x$ podle z_x

Odhad spolehlivosti

$$x = (\hat{\mu}_x \pm z_x)\ [\text{jednotka}]$$

Pro normální rozdělení chyby

- $\hat{\mu}_x = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{n}$
- s směrodatná odchylka jednoho měření, D rozptyl

$$s = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\overline{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

- $s_{\overline{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\frac{1}{n})^2 s_{x_i}}$ a protože měření byly prováděny za stejných podmínek

$$s_{\overline{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\overline{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

Odhad spolehlivosti

$$x = (\hat{\mu}_x \pm z_x) \text{ [jednotka]}$$

Pro normální rozdělení chyby

- $z_x = t_{(p;n-1)} s_{\overline{x}}$

n \ P	0,683	0,954	0,99	n \ P	0,683	0,954	0,99
1	1,8395	13,8155	63,6567	16	1,0329	2,1633	2,9208
2	1,3224	4,5001	9,9248	18	1,0292	2,1433	2,8784
3	1,1978	3,2923	5,8409	20	1,0263	2,1276	2,8453
4	1,1425	2,8585	4,6041	30	1,0176	2,0817	2,75
5	1,1113	2,6396	4,0321	40	1,0133	2,0595	2,7045
6	1,0913	2,5084	3,7074	50	1,0108	2,0463	2,6778
7	1,0775	2,4214	3,4995	60	1,0091	2,0377	2,6603
8	1,0673	2,3594	3,3554	70	1,0078	2,0315	2,6479
9	1,0594	2,3131	3,2498	80	1,0069	2,0269	2,6387
10	1,0533	2,2773	3,1693	90	1,0062	2,0234	2,6316
12	1,0441	2,2253	3,0545	100	1,0057	2,0206	2,6259
14	1,0377	2,1895	2,9768				

Opakování měření

- Předchozí úvahy předpokládaly **nezávislá měření prováděná za stejných podmínek**.
- Co to znamená?

Opakování měření

- Předchozí úvahy předpokládaly **nezávislá měření prováděná za stejných podmínek**.
- Co to znamená?
  - musím zajistit stejné podmínky
  - pokud měření opakuji na stejném systému, musím zajistit „reset systému“ před opakováním měření
  - předchozí měření nesmí mít vliv na nové měření

Příklad odhadu spolehlivosti

Příklad – měření výšky válečku [?]:

výška v [mm]	4,6	4,5	4,7	4,4	4,5	4,6	4,4	4,4	4,3	4,5

- $n = 10$
- $\overline{v} = 4{,}49\,[\mathrm{mm}]$
- $s_{\overline{v}} = 0{,}038\,[\mathrm{mm}]$
- $t_{(0,68;9)} = 1{,}059$
- $t_{(0,99;9)} = 3{,}250$

$$
\begin{array}{ll}
v = (4{,}49 \pm 0{,}04)\ \mathrm{mm} & \text{pro } p = 0{,}68 \\
v = (4{,}49 \pm 0{,}12)\ \mathrm{mm} & \text{pro } p = 0{,}99
\end{array}
$$

Chyba nepřímo měřené veličiny

- K odhadu střední hodnoty a rozptylu lze použít
  - Taylorův rozvoj funkce

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\varepsilon^n$$

    kde $f^{(n)}(x)$ je n-tá derivace f,
  - dvoubodovou aproximaci $y = \mathrm{f}(x_1, \ldots, x_m)$

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{f}(\overline{x_i} + s_{\overline{x_i}}) + \mathrm{f}(\overline{x_i} + s_{\overline{x_i}})}{2m} \qquad s_{\overline{y}}^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{[\mathrm{f}(\overline{x_i} + s_{\overline{x_i}}) - \mathrm{f}(\overline{x_i} - s_{\overline{x_i}})]^2}{4m}$$

  - Monte Carlo simulace

Zákon přenosu chyb

- Na základě Taylorova rozvoje do druhého členu

$$s_{\overline{z}}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 s_{\overline{x_i}}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} s_{\overline{x_i}} s_{\overline{x_j}} \varrho_{ij} \ ,$$

kde $s_{\overline{x_i}}^2$ je rozptyl (variance) x_i a ϱ_{ij} je kovariance x_i a x_j.

Pro jednoduché případy, kdy x a y jsou nezávislé ($\varrho_{ij} = 0$):

- aditivní funkce $z = ax \pm by$

$$s_{\overline{z}} = \sqrt{a^2 s_{\overline{x}}^2 + b^2 s_{\overline{y}}^2} \ , \tag{1}$$

- multiplikativní funkce $z = ax^b y^c$

$$s_{\overline{z}} = \overline{z} \sqrt{\left(\frac{b s_{\overline{x}}}{\overline{x}} \right)^2 + \left(\frac{c s_{\overline{y}}}{\overline{y}} \right)^2} \ . \tag{2}$$

kde $\overline{z} = a \overline{x}^b \overline{y}^c$.

Model

- Mapování matematického modelu na naměřené hodnoty
  - hledáme parametry modelu
  - minimalizujeme odchylky (rezidua) modelu od naměřených dat

$$r_i(\mathbf{x}) = \|y_i - M(\mathbf{x})\|$$

  příp. vyjádřeno jako minimalizace normy vektoru

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (r_1(\mathbf{x}), \ldots, r_m(\mathbf{x}))^T$$

  - nejčastěji pracujeme s euklidovskou L_2 normou (metoda nejmenších čtverců)

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(\mathbf{x})^2$$

  - lze použít např. i L_1 (součet absolutních hodnot – méně citlivé na data s větší kumulací chyb, příp. zatížená hrubou chybou) či L_∞ (maximum z absolutních hodnot)

Model

- Metoda nejmenších čtverců
  - mějme data (x_i, y_i), kde x_i je nezávislá proměnná a y_i je závislá (měřená proměnná)
  - minimalizujeme $S = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, \mathbf{c}))^2$, kde $\mathbf{c}$ je vektor parametrů
  - hledáme minimum vzhledem k $\mathbf{c}$, tedy

$$\frac{\partial S}{\partial c_j} = 2 \sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial c_j} = -2 \sum_i \frac{\partial f(x_i, \mathbf{c})}{\partial c_j} r_i = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

Hodnocení modelu

- Pearsonův korelační koeficient

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}((x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

  - lineární závislost dvou veličin x a y a nabývá hodnot [-1;1]
  - 1 … přesná souhlasná závislost,
    -1 … přesná inverzní závislost,
    0 nezávislé
  - využívá se často jako $r_{x,y}^2$

- Root mean square deviation – RMSD

$$\mathrm{RMSD}_{x,y} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}{n}}$$

  - srovnání mezi získaným modelem a originálními hodnotami