Faculty of Informatics
Masaryk University Brno

Cvičení k předmětu
IB005 Formální jazyky a automaty

poslední modifikace 15. dubna 2021

Tato sbírka byla vytvořena z příkladů ke cvičení z předmětu *Formální jazyky a automaty I*, které byly původně připraveny Ivanou Černou. Na opravě chyb a doplnění příkladů se podíleli Jiří Barnat, Vojtěch Řehák, Jan Strejček a mnoho dalších studentů a cvičících.

Formální jazyky, regulární gramatiky

1.1 Jsou dány jazyky L_1, L_2 nad abecedou $\{x, y, z\}$, kde $L_1 = \{xy, y, yx\}$, $L_2 = \{y, z\}$. Vypočítejte:

a) $L_1 \cup L_2$

b) $L_1 \cap L_2$

c) $L_1 \cdot L_2$, $L_2 \cdot L_1$

d) L_2^0, L_2^1, L_2^2, L_2^3, L_2^*, L_2^+

e) $co - L_2$

1.2 Vypočítejte:

a) $\emptyset^*$, $\emptyset^+$, $\{\varepsilon\}^*$, $\{\varepsilon\}^+$

b) $\emptyset \cup \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cap \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cap L$, $\{\varepsilon\} \cap L$

c) $\emptyset \cdot \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cdot L$, $\{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon\} \cdot L$

1.3 Jsou dané jazyky $L_1, L_2 \subseteq \{a, b, c, d\}^*$, kde $L_1 = \{a, aa, ba\}$, $L_2 = \{ba, abc, a, \varepsilon\}$.

a) Vypočítejte $L_1 \cup L_2$.

b) Vypočítejte $L_1 \cap L_2$.

c) Vypočítejte $L_1 \cdot L_2$.

d) Rozhodněte, zda platí $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$.

e) Najděte slovo $w \in L_1 \cdot L_2 \cap L_2 \cdot L_1$.

f) Rozhodněte, zda platí $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$. Pokud ano, platí tvrzení pro libovolnou dvojici jazyků L_1, L_2? Pro pokročilé: platí $\varepsilon \in L_2 \iff L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$?

g) Rozhodněte, zda platí
   - $aabaabc \in L_2^4$
   - $baaabc \in L_2^6$
   - $ababc \in L_2^3$

h) Popište $co - L_2$ (komplement jazyka L_2).

1.4 Buď L libovolný jazyk, rozhodněte zda platí:

a) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L^i = \{w^i \mid w \in L\}$

b) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $w \in L^i \Rightarrow |w| = i$

c) najděte jazyk, pro který oba výše uvedené vztahy platí

1.5 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_4$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{xyz\}^*$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_5 = (\{x, y\}^* \cup \{z\}^*)^*$

- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.6 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_3$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{x, y, z\}^+$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = \{x\}^* \cdot \{y\}^2 \cdot \{z\}^*$
- $L_5 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.7 Pomocí jazyků $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$ nad abecedou $\{a, b\}$ a množinových operací sjednocení ($\cup$), průniku ($\cap$), konkatenace ($\cdot$), iterace (*,$^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk, obsahující všechna slova, která

a) obsahují alespoň 2 znaky a
b) mají sudou délku
c) začínají znakem a a končí znakem b
d) začínají a končí stejným znakem
e) obsahují podslovo aba
f) splňují b) a c)
g) nesplňují b)

1.8 Pro libovolné jazyky $L_1,\ L_2,\ L_3$ dokažte, zda platí, nebo neplatí:

a) $L_1 \subset L_1 \cdot L_2$
b) $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$
c) $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$
d) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L_1^i \cdot L_2^i = (L_1 \cdot L_2)^i$
e) $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
f) $L_1^* \cdot L_1^* = L_1^*$
g) $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2 \cdot (L_1)^*)^*$

1.9 Jaký jazyk generuje gramatika G a jakého je typu?

a) $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, kde

$$P = \{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSb \mid cAd, \\ cA & \rightarrow & aB \mid Ca, \\ Bd & \rightarrow & Sb \mid A, \\ Cad & \rightarrow & ab \mid \varepsilon \ \} \end{array}$$

b) $G = (\{S, A\}, \{b, c, a\}, P, S)$, kde

$$P = \{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & bS \mid cS \mid aA, \\ A & \rightarrow & aA \mid bA \mid cA \mid a \mid b \mid c \ \} \end{array}$$

1.10 Jaký jazyk generuje následující gramatika? Diskutujte vhodné označení neterminálů $(S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11})$.

$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$P = \{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aA \mid bB \mid \varepsilon, \\ A & \rightarrow & aS \mid bC, \\ B & \rightarrow & aC \mid bS, \\ C & \rightarrow & aB \mid bA \ \} \end{array}$$

1.11 Navrhněte regulární gramatiky pro následující jazyky:

a) $L = \{a, b, c, d\}^*$

b) $L = \{a, b, c, d\}^i \{a, b, c, d\}^*; i = 2, 10, 100$

c) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \geq 3\}$

d) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = 3k,\ k \geq 0\}$

e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w$ obsahuje podslovo $abb\}$

f) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

g) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*,$ první 3 znaky $w =$ poslední 3 znaky $w\}$

h) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w$ neobsahuje podslovo $abb\}$

i) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 3l + 1,\ k, l \geq 0\}$

j) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w$ je zápis přir. čísla dělitelného $5\}$

k) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w$ je zápis přir. čísla dělitelného $3\}$

l) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w$ je zápis přir. čísla dělitelného $25\}$

Deterministické konečné automaty, pumping lemma

2.1 Je dán následující konečný automat: $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_0, b) = q_2 \\ \delta(q_1, a) = q_3 & \delta(q_1, b) = q_1 \\ \delta(q_2, a) = q_2 & \delta(q_2, b) = q_2 \\ \delta(q_3, a) = q_1 & \delta(q_3, b) = q_2 \end{array}$$

a) Uveďte jinou formu zápisu automatu.

b) Popište jazyk akceptovaný konečným automatem A.

c) Diskutujte variantu konečného automatu, kde $F = \{q_3, q_2\};\ \delta(q_3, a) = q_0$

2.2 Konstruujte **deterministické** FA, které rozpoznávají následující množiny

a) $\{a, b, c\}^5 \cdot \{a, b, c\}^*$

b) $\{w \mid w \in \{a\}^*;\ |w| = 2k \text{ nebo } |w| = 7l;\ k, l \geq 0\}$

c) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ \#_a(w) = 3k; k \geq 0\}$

d) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w \text{ obsahuje podslovo } abbab\}$

e) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w \text{ obsahuje podslovo } ababb\}$

f) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w \text{ neobsahuje podslovo } abbab\}$

g) $\{a, b\}^* \cdot (\{c, d\} \cup (\{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\})) \cdot \{a, b\}^+$

h) $(\{a\} \cup \{b\} \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\})^*$

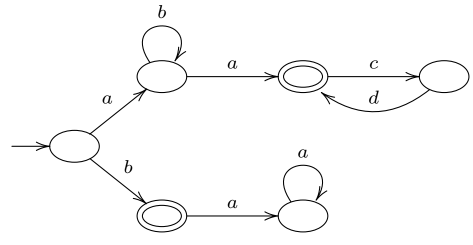
2.3 Konstruujte **deterministické** FA pro následující jazyk nad abecedou $\{a, b, c, d\}$

a) $L = \{a, b\}^* \cdot \{c\} \cdot \{aa, b\}^* \cdot \{d\}^+$

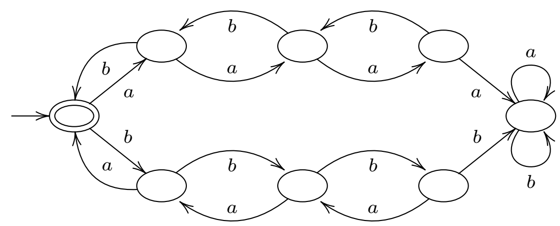
b) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje podslovo } babb\}$

c) $L = \{a, b\}^* \cdot (\{cd\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\}) \cdot \{a, b\}^+$

2.4 Pomocí množin $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ a množinových operací sjednocení ($\cup$), průniku ($\cap$), konkatenace ($\cdot$), iterace (*,$^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk akceptovaný automatem:



2.5 Co akceptuje následující automat? ($\#_a(w) = \#_b(w)$ je špatná odpověď)



2.6 Pomocí **věty o vkládání** dokažte, že jazyk L není regulární:

a) $L = \{a^i b^j \mid j > i \geq 1\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*;\ \#_a(w) = \#_b(w)\}$

c) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

d) $L = \{a^n \mid n = 2^i;\ i \geq 0\}$

e) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j;\ i,j \geq 0\}$

f) $L = \{a^n b^{(n!)^2} \mid n \geq 0\}$

g) $L = \{c^i a^j b^k \mid j \leq k;\ i,j,k \in \mathbb{N}\}$

2.7 O každém z následujících jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a,b,c\}$ rozhodněte, zda je regulární, a vaše tvrzení dokažte.

a) $\{uv \mid u,v \in \{a,b\}^*, |u| < |v|\}$

b) $\{ucv \mid u,v \in \{a,b\}^*, |u| < |v|\}$

2.8 Pro pokročilé: Zkonstruujte konečný automat A rozpoznávající jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}$. Dokažte, že automat rozpoznává zadaný jazyk, tedy že $L(A) = L$.

2.9 Konstruujte **deterministické** FA pro všechny regulární jazyky příkladu 1.11.

Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhillova-)Nerodova věta

3.1 Pro následující konečné automaty zadané tabulkou:

- ověřte, že všechny stavy jsou dosažitelné
- zkonstruujte minimální automat
- minimální automat zapište v kanonickém tvaru

a)

	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	5	2
3	3	5
$\leftarrow 4$	12	2
$\leftarrow 5$	7	8
6	4	9
7	12	11
8	4	6
9	10	8
$\leftarrow 10$	3	2
$\leftarrow 11$	12	6
12	3	10

b)

	a	b
$\leftrightarrow 1$	3	2
2	6	4
3	3	5
$\leftarrow 4$	4	2
5	10	8
6	6	7
$\leftarrow 7$	7	5
$\leftarrow 8$	8	2
$\leftarrow 9$	11	2
10	10	9
$\leftarrow 11$	11	5

3.2 Odstraňte nedosažitelné stavy z DFA zadaného tabulkou vlevo a minimalizujte ho a převeďte do kanonického tvaru. Poté ověřte, zda je výsledný automat ekvivalentní s automatem zadaným tabulkou vpravo.

a)

	a	b
$\rightarrow 1$	5	2
2	2	8
3	2	7
$\leftarrow 4$	9	4
5	2	1
6	2	5
$\leftarrow 7$	8	6
8	2	4
9	8	9

	a	b
$\rightarrow 1$	4	2
2	2	5
3	3	6
4	4	2
$\leftarrow 5$	5	3
$\leftarrow 6$	6	2

b)

	a	b
1	3	1
$\rightarrow 2$	9	4
3	–	1
$\leftarrow 4$	9	4
5	8	5
6	5	4
$\leftarrow 7$	6	9
8	11	–
9	7	9
10	12	3
11	8	1
12	–	10

	a	b
1	2	1
$\leftarrow 2$	3	1
3	4	5
4	4	4
$\rightarrow 5$	1	5

3.3 Ověřte, zda DFA z příkladu 3.1 **a)** je ekvivalentní s následujícím DFA zadaným tabulkou

	a	b
1	1	3
$\rightarrow 2$	4	1
$\leftarrow 3$	4	1
4	3	4

3.4 Navrhněte nedeterministické konečné automaty pro následující jazyky:

a) $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abbc$ nebo bba nebo $aba\}$

b) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abbc$ nebo $acbca$ nebo $bcabb\}$

c) $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w$ končí řetězcem $aaaa\}$

d) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ má čtvrtý symbol od konce $1\}$

e) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ končí řetězcem $01011\}$

f) $L = ((\{0\}^* \cdot \{1\}) \cup (\{0\}^+ \cdot \{1\}^* \cdot \{0\})^*)^*$

g) $L = ((\{0\} \cdot \{0\} \cdot \{0\}^*) \cup (\{1\} \cdot \{1\} \cdot \{1\}^*))^*$

3.5 K daným nedeterministickým FA zkonstrujte deterministické FA.

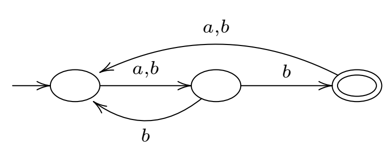
a)

	a	b	c
$\rightarrow 1$	{2,3}	{3,4}	{1}
$\leftarrow 2$	{3}	{4}	{2}
3	{1,2,3}	{1}	{3,4}
4	{1}	{1}	{3,4}

b)

	a	b	c
$\rightarrow 1$	{1,2}	{1}	$\emptyset$
$\leftarrow 2$	$\emptyset$	{3}	{1}
3	$\emptyset$	$\emptyset$	{1,4}
4	{5}	$\emptyset$	$\emptyset$
5	$\emptyset$	{6}	$\emptyset$
6	{7}	$\emptyset$	$\emptyset$
$\leftarrow 7$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

3.6 Popište jazyk akceptovaný automatem:



3.7 Kolik různých jazyků rozhodují automaty s jedním nebo se dvěma stavy nad abecedou $\{x\}$ nebo $\{x, y\}$?

3.8 Dokažte, že neexistuje (totální deterministický) automat se 4 stavy, který akceptuje jazyk:

a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \ |w| \geq 4\}$

b) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \ |w| = 5k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$

3.9 Najděte a formálně popište alespoň dvě relace $\sim \subseteq \{a,b\}^* \times \{a,b\}^*$ splňující podmínky Nerodovy věty pro jazyk

$$L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ w \text{ obsahuje podslovo } abb\}.$$

Určete indexy těchto relací.

3.10 Pomocí Nerodovy věty a posléze pomocí Myhillovy-Nerodovy věty dokažte, že není regulární:

a) $L = \{a^n \mid n = 2^i,\ i \geq 0\}$

b) $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n,\ n, m > 0\}$

c) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^+\}$

d) $L = \{a^i b^j | i \neq j;\ i, j \geq 0\}$

3.11 Pomocí MN věty dokažte, že je regulární:

- $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = 3k,\ k \geq 0\}$

3.12 Každý jazyk jednoznačně určuje relaci $\sim_L$ předpisem $u \sim_L v$ právě když pro každé w platí $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$. Určete index této relace pro jazyky:

a) $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^*$

b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

3.13 Nechť $\Sigma = \{a, b\}$. Uvažte následující relace na množině Σ^*:

a) $u \sim v \quad \Longleftrightarrow \quad \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$

b) $u \sim v \quad \Longleftrightarrow \quad \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ nebo u i v končí na stejné písmeno

c) $u \sim v \quad \Longleftrightarrow \quad \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ a u i v končí na stejné písmeno

(Prázdné slovo končí na stejné písmeno jako prázdné slovo, ale žádné neprázdné slovo na stejné písmeno nekončí.) U každé relace určete, zda je to ekvivalence. Pokud ano, určete její index a zda je pravou kongruencí. Pokud ano, nalezněte jazyk L takový, že $\sim_L = \sim$. Nakonec nalezněte jazyk L', který je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$, ale přitom $\sim_{L'} \neq \sim$.

Regulární gramatiky a výrazy $\Leftrightarrow$ FA, ε-kroky, Kleeneho věta

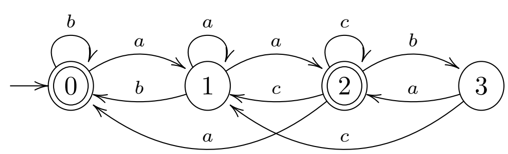
4.1 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$
\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{G = (\{S, A, C, B\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}} \\
P = \{ & S & \rightarrow & aA & \mid bC & \mid a & \mid \varepsilon, & \\
 & A & \rightarrow & bB & \mid aA & \mid b & \mid c, & \\
 & B & \rightarrow & aB & \mid bC & \mid aC & \mid cA & \mid c, \\
 & C & \rightarrow & a & \mid b & \mid aA & \mid bB \} &
\end{array}
$$

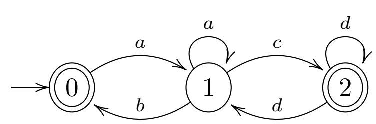
4.2 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}} \\
P = \{ & S & \rightarrow & aX & \mid bY & \mid c, \\
 & X & \rightarrow & bX & \mid bS, & \\
 & Y & \rightarrow & bS & \mid cZ, & \\
 & Z & \rightarrow & aS & \mid b & \mid c \}
\end{array}
$$

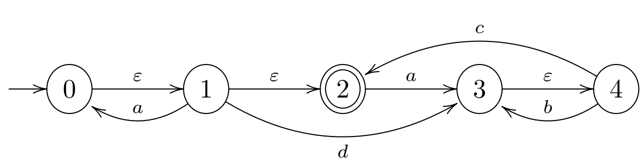
4.3 Zkonstruujte ekvivalentní regulární gramatiku k automatu:



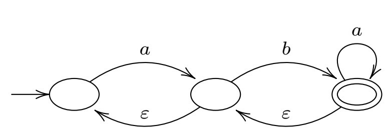
4.4 Zkonstruujte ekvivalentní regulární gramatiku k automatu:



4.5 K danému automatu s ε-kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε-kroků.



4.6 K danému automatu s ε-kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε-kroků.



4.7 K danému automatu s ε-kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε-kroků.

	a	b	c	ε
$\rightarrow 1$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$
2	$\{5\}$	$\{3,5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\{6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
4	$\emptyset$	$\{4\}$	$\emptyset$	$\{1,5\}$
5	$\{5\}$	$\emptyset$	$\{3\}$	$\{6\}$
$\leftarrow 6$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3,6\}$	$\{2\}$

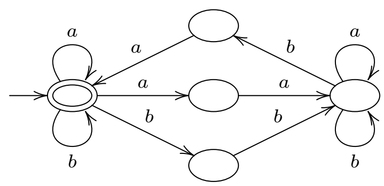
4.8 K danému regulárnímu výrazu zkonstruujte ekvivalentní FA

a) $(ab)^*(aa+bb)(a+ab)^*$

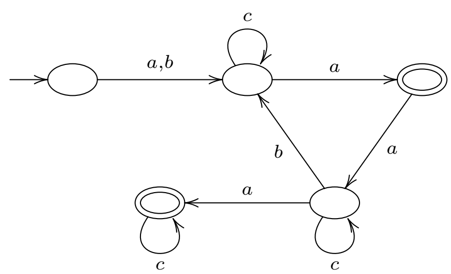
b) $((a+b(a+c))^*+(b+c))^*$

c) $(((a+b)^*+c)^*+d)^*$

4.9 K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.10 K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.11 Pomocí regulárních výrazů popište násl. jazyky:

a) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ končí na $ab\}$

b) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, k \geq 0\}$

c) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ začíná a končí stejným symbolem $\}$

d) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| = 2k, k \geq 0\}$

4.12 Ukažte, jaký je vztah mezi třídou regulárních jazyků $\mathcal{R}$ a nejmenší třídou

a) M_1, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, zřetězení a průniku $(\cup, \cdot, \cap)$.

b) M_2, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a komplementu $(\cup, \cap, co-\ )$.

c) M_3, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a mocnině $(\cup, \cap, ^n)$.

Uzávěrové vlastnosti $\mathcal{R}$

5.1 Rozhodněte, zda platí: jsou-li jazyky $L_1, L_2, L_3, \ldots$ regulární, pak i jazyk

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

je regulární jazyk.

5.2 Najděte takovou posloupnost regulárních jazyků $L_1, L_2, L_3, \ldots$ aby jazyk

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$$

nebyl regulární.

5.3 Nechť L_1, L_2 jsou **ne**regulární jazyky nad abecedou $\{a, b\}$. Dokažte nebo vyvraťte, zda je či není regulární:

a) $L_1 \cap L_2$
b) $L_1 \cup L_2$
c) $L_1 \smallsetminus L_2$
d) $L_1 \cdot L_2$
e) L_1^*
f) $co{-}L_1$

5.4 Nechť L_1 je regulární a $L_1 \cap L_2$ je neregulární jazyk. Platí, že jazyk L_2 je nutně neregulární?

5.5 Platí následující implikace?

a) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je neregulární
b) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je regulární
c) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \smallsetminus L_2$ je neregulární
d) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \smallsetminus L_2$ je regulární
e) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \smallsetminus L_1$ je neregulární
f) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \smallsetminus L_1$ je regulární

5.6 **Def:** operace $\odot$ rozšířeného sjednocení dvou jazyků takto:

$$L_1 \odot L_2 = \{u \cdot v \mid u, v \in (L_1 \cup L_2)\}$$

Dokažte, že jestliže jsou jazyky L_1 a L_2 regulární, pak i jazyk $L_1 \odot L_2$ je regulární. Dále najděte dva takové neregulární jazyky L_1 a L_2, aby jazyk $L_1 \odot L_2$ byl regulární.

5.7 Nechť $L \subseteq \Sigma^*$ je regulární jazyk. Dokažte, že jazyky $L^\#$ jsou regulární:

a) $L^\# = \{v \mid \text{existuje } u \in \Sigma^* \text{ takové, že } u.v \in L\}$
b) $L^\# = \{w \mid \text{existují } x, y, z \in \Sigma^* \text{ takové, že } y \in L \text{ a } w = xyz\}$

5.8 Dokažte, že pro libovolný jazyk L a libovolný konečný jazyk K platí:

a) L je regulární $\iff$ $L \setminus K$ je regulární

b) L je regulární $\iff$ $L \cup K$ je regulární

5.9 **Def:** Homomorfismus $h : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ je daný předpisem:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(u.v) &= h(u).h(v) \text{ pro všechny } u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Def: Nechť L je jazyk, pak $h(L) = \{w \mid w = h(u), \text{ kde } u \in L\}$
Def: Inverzní Homomorfismus:

$$\begin{aligned} h^{-1}(y) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) = y\} \\ h^{-1}(L) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) \in L\} \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} h(a) &= 01 \\ h(b) &= 011, \text{ pak} \end{aligned}$$

- $h(abb) = 01011011$
- $h^{-1}(0101011) = \{aab\}$
- $h^{-1}(0010) = \emptyset$
- pokud navíc $h(c) = \varepsilon$ pak $h^{-1}(01011) = L(c^*ac^*bc^*)$

Ukažte, že $\mathcal{R}$ je uzavřena na h, h^{-1}.

5.10 Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h; $h(a) = ac, h(b) = cb, h(c) = ca$. Určete:

- $h(aabc), h(cbaa)$
- $h^{-1}(cccaaccb), h^{-1}(accba)$
- $h(L), L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

5.11 Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h; $h(a) = aa, h(b) = ba, h(c) = a$. Určete:

- $h^{-1}(aabaaabaa)$
- $h(L), L = \{w \in \{a^*, b^*\} \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $h^{-1}(L), L = \{w \in \{a^*\} \mid |w| = 2k, k \in N\}$

5.12 Dokažte nebo vyvraťte

- $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$
- $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$
- $h((L_1 \cdot L_2)^R) = h(L_1^R) \cdot h(L_2^R)$
- $h(L_1 \cap L_2) = h(L_1) \cap h(L_2)$
- $h(h(L)) = h(L)$
- $h^{-1}(h(L)) = L$
- $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) = h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cup L_2) = h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cap L_2) = h^{-1}(L_1) \cap h^{-1}(L_2)$

Bezkontextové gramatiky

6.1 Co generují tyto gramatiky?

a) $G = (\{S, B, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\ S &\rightarrow aB \mid bA \mid \varepsilon,\\
A &\rightarrow aS \mid bAA,\\
B &\rightarrow bS \mid aBB\ \}
\end{aligned}
$$

b) $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\ S &\rightarrow aAS \mid a,\\
A &\rightarrow ba \mid Sba\ \}
\end{aligned}
$$

6.2 Pro následující gramatiku

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\ S &\rightarrow AaB \mid BaA,\\
A &\rightarrow AB \mid a,\\
B &\rightarrow BB \mid b\ \}
\end{aligned}
$$

a) najděte derivační strom s výsledkem $bbbbaa$

b) je tento strom určený jednoznačně?

c) kolik různých nejlevějších odvození má slovo $bbbbaa$

d) je gramatika jednoznačná?

e) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.3 Jaké mají charakteristické vlastnosti derivační stromy pro regulární gramatiky?

6.4 Obsahuje množina jednoznačných CFL všechny regulární jazyky?

6.5 Odpovězte zda pro

$G = (\{S\}, \{a\}, P, S)$, kde

$P = \{\ S \rightarrow SSS \mid a\ \}$

a) je gramatika jednoznačná?

b) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.6 Navrhněte jednoznačnou gramatiku generující jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \cup \{a^k \mid k \geq 1\}$.

6.7 Navrhněte gramatiku pro jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1, i = j \text{ nebo } j \neq k\}$, je gramatika jednoznačná? Lze sestrojit jednoznačnou gramatiku pro tento jazyk?

6.8 Najděte ekvivalentní redukovanou gramatiku k této gramatice:

$G = (\{S, A, B, C, E, F, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\ S &\rightarrow aA \mid bB,\\
A &\rightarrow aAB \mid aa \mid AC \mid AE,\\
B &\rightarrow bBA \mid bb \mid CB \mid BF,\\
C &\rightarrow DE,\\
D &\rightarrow cc \mid DD,\\
E &\rightarrow FF \mid FE,\\
F &\rightarrow EcE\ \}
\end{aligned}
$$

6.9 Najděte bezkontextovou gramatiku, na níž lze ukázat, že opačné pořadí aplikace odstranění nenormovaných neterminálů a odstranění nedosažitelných symbolů vede k neredukované gramatice.

6.10 Je jazyk generovaný gramatikou G bezkontextový?

$G = (\{S,T\},\{x,y\},P,S)$, kde

$$P = \{\begin{array}{lcl} S & \to & xT, \\ T & \to & Sx, \\ xTx & \to & y\ \} \end{array}$$

6.11 Navrhněte bezkontextové gramatiky pro jazyky:

a) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b,c\}^*\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^*, w = w^R\}$

c) $L = \{a^{3n+2}b^{2n} \mid n \geq 2\}$

d) $L = \{a^n b^n b^{m+1} c^{m-1} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$

e) $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$

f) $L = \{uxv \mid u, x, v \in \{a,b,c\}^*, uv = (uv)^R, x = ca^n b^{2n} c, n \geq 0\}$

g) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) > \#_b(w)\}$

h) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) = 2 * \#_b(w)\}$

Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.1 Odstraňte ε-pravidla:

$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c, a\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{lllllllll}
P = \{ & S & \to & ABC, & & & & & \\
& A & \to & AbA & \mid & BC, & & & \\
& B & \to & bB & \mid & b & \mid & cBbAa & \mid \varepsilon, \\
& C & \to & cD & \mid & c & \mid & Ab & \mid \varepsilon, \\
& D & \to & SSS & \mid & b \ \} & & &
\end{array}
$$

7.2 Odstraňte ε-pravidla:

$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{lllllllll}
P = \{ & S & \to & ABC, & & & & & \\
& A & \to & Ab & \mid & BC, & & & \\
& B & \to & bB & \mid & b & \mid & Ab & \mid \varepsilon, \\
& C & \to & cD & \mid & c & \mid & Ac & \mid \varepsilon, \\
& D & \to & SSD & \mid & cSAc \ \} & & &
\end{array}
$$

7.3 Odstraňte ε-pravidla:

$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{1, 0\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{lllllll}
P = \{ & S & \to & 1X & \mid Y1 & \mid XZ, \\
& X & \to & 0YZ1 & \mid S1X & \mid Y, \\
& Y & \to & 1 & \mid X1 & \mid \varepsilon, \\
& Z & \to & SZ & \mid 0 & \mid \varepsilon \ \}
\end{array}
$$

7.4 Význam konstrukce množin N_ε na příkladu

$G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A)$, kde

$$
\begin{array}{llllll}
P = \{ & A & \to & BC & \mid a & \mid \varepsilon, \\
& B & \to & aB & \mid ACC & \mid b, \\
& C & \to & cC & \mid AA & \mid c \ \}
\end{array}
$$

7.5 Odstraňte jednoduchá pravidla. Diskuse o významu N_A.

$G = (\{S, X, Y, A, D, B, C\}, \{b, a\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{lllll}
P = \{ & S & \to & X & \mid Y, \\
& A & \to & bS & \mid D, \\
& D & \to & ba, & \\
& B & \to & Sa & \mid a, \\
& X & \to & aAS & \mid C, \\
& C & \to & aD & \mid S, \\
& Y & \to & SBb \ \} &
\end{array}
$$

7.6 Převeďte do Chomského normální formy

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{lllllll}
P = \{ & S & \to & SaSbS & \mid aAa & \mid bBb, & \\
& A & \to & aA & \mid aaa & \mid B & \mid \varepsilon, \\
& B & \to & Bb & \mid bb & \mid b \ \} &
\end{array}
$$

7.7 Převeďte do Chomského normální formy

$G = (\{S, H, L\}, \{0, 1\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllllll}
P = \{ & S & \rightarrow & 0H1 & \mid 1L0 & \mid \varepsilon, & & \\
 & H & \rightarrow & HH & \mid 0H1 & \mid LH & \mid \varepsilon, & \\
 & L & \rightarrow & LL & \mid 1L0 & \mid HL & \mid \varepsilon \} &
\end{array}
$$

7.8 Navrhněte gramatiku v CNF:

a) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

b) $L = \{a^{2i}b^{3i}c^j \mid i \geq 1, j \geq 0\}$

7.9 Nechť G je gramatika v CNF. Nechť $w \in L(G), |w| = n$. Jaká je minimální a maximální délka odvození slova w v G?

7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllllll}
P = \{ & S & \rightarrow & Aa & \mid Bb & \mid aaA & \mid SaA & \mid SbB, \\
 & A & \rightarrow & AAb & \mid ab & \mid SBb, & & \\
 & B & \rightarrow & Bbb & \mid BBB & \mid bAb \} & &
\end{array}
$$

7.11 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$G = (\{S, A, B\}, \{1, 0\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllll}
P = \{ & S & \rightarrow & A1 & \mid 0 & \mid 1B, \\
 & A & \rightarrow & BS0 & \mid 10 & \mid SB0, \\
 & B & \rightarrow & 0B & \mid B1B & \mid S0 \}
\end{array}
$$

7.12 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$G = (\{S, X, Y\}, \{c, d, b, a\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllll}
P = \{ & S & \rightarrow & Xc & \mid Yd & \mid Yb, \\
 & X & \rightarrow & Xb & \mid a, & \\
 & Y & \rightarrow & SaS & \mid Xa \} &
\end{array}
$$

7.13 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$G = (\{S, T\}, \{t, s\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{lllllll}
P = \{ & S & \rightarrow & TTt & \mid Tt & \mid TS & \mid s, \\
 & T & \rightarrow & SsT & \mid TsT & \mid t \} &
\end{array}
$$

7.14 Transformujte do Greibachové NF. Výslednou gramatiku převeďte do 3GNF.

$G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A)$, kde

$$
\begin{array}{lllll}
P = \{ & A & \rightarrow & BC, & \\
 & B & \rightarrow & CD & \mid AB, \\
 & C & \rightarrow & Aa & \mid b, \\
 & D & \rightarrow & bA & \mid DD \}
\end{array}
$$

7.15 Dokažte, že následující jazyky nejsou bezkontextové

a) $L = \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$

b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

c) $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 1\}$

Zásobníkové automaty, C-Y-K

8.1 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_4\})$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\} & \delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{(q_2, A), (q_3, A)\} & \delta(q_2, c, A) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_3, d, A) = \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_4, Z)\} \\
\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{(q_4, Z)\} &
\end{array}$$

a) Načrtněte stavový diagram PDA A.

b) Naznačte 4 různé výpočty na vstupu a^3b^2c (stačí na obrázku).

c) Popište jazyk $L(A)$.

8.2 Je daný PDA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_2, q_4\})$, kde

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, X)\} & \delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX), (q_1, YX)\} \\
\delta(q_1, a, Y) = \{(q_1, YY)\} & \delta(q_1, b, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, b, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, c, X) = \{(q_3, \varepsilon)\} \\
\delta(q_3, c, X) = \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_3, d, X) = \{(q_4, \varepsilon)\}
\end{array}$$

a) Popište jazyk akceptovaný automatem, pokud $F = \{q_2\}$.

b) Popište jazyk akceptovaný automatem s původním F, tj. $F = \{q_2, q_4\}$.

8.3 Konstruujte PDA (akceptující koncovým stavem nebo prázdným zásobníkem) pro jazyky:

a) $L = \{a^ib^j \mid i \neq j,\ i, j \geq 0\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w = w^R\}$

c) $L = \{a^{3n}b^{2n} \mid n \geq 1\}$

d) $L = \{a^{3n+2}b^{2n-1} \mid n \geq 1\}$

e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$

f) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$

g) $L = \{a^kb^j \mid 1 \leq j \leq k \leq 2j\}$

h) $L = \{a^{n+m}b^{m+p}c^{p+n} \mid m, p, n \geq 1\}$

i) $L = \{a^ib^jc^j \mid i, j \geq 1\} \cup \{a^kb^kc^m \mid k, m \geq 1\}$

j) $L = \{a^{k_1}ba^{k_2}b \dots ba^{k_r} \mid r > 1,\ k_i \geq 1\ (i = 1, \dots, r;\ \text{existuje } p, s : p \neq s, k_p = k_s)\}$

8.4 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_1\})$ akceptující koncovým stavem transformujte na ekvivalentní automat akceptující prázdným zásobníkem. Určete $L(A)$.

$$\begin{array}{l}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\} \\
\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}
\end{array}$$

8.5 Daný PDA $A = (\{q\}, \{(,)\}, \{Z, L, P\}, \delta, q, Z, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní automat akceptující koncovým stavem. Určete $L(A)$.

$$\begin{aligned}
\delta(q, (, Z) &= \{(q, L)\}\\
\delta(q, (, L) &= \{(q, LL)\}\\
\delta(q,), L) &= \{(q, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

8.6 Pro danou G navrhněte (rozšířený) PDA, který provádí syntaktickou analýzu:

a) shora dolů,

b) zdola nahoru.

V obou případech proveďte analýzu slova *ababbb*.

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{llllllll}
P = \{ & S & \to & abAS & \mid & bb, & & \\
 & A & \to & AbB & \mid & aB & \mid & a, \\
 & B & \to & bSS & \mid & aB & \mid & \varepsilon \;\}
\end{array}$$

8.7 Rozšířený zásobníkový automat, který vznikl metodou syntaktické analýzy zdola nahoru z gramatiky z příkladu 8.6 převeďte na standardní zásobníkový automat.

8.8 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C\}, \delta, q_0, A, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0, a, A) = \{(q_1, B)\} & \delta(q_1, c, A) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, B) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, AB)\} & \delta(q_1, a, B) = \{(q_0, ABC)\} & \delta(q_2, \varepsilon, C) = \{(q_0, A)\}
\end{array}$$

8.9 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, X\}, \delta, 0, Z, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AA)\} \quad \delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AAA)\} \quad \delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

8.10 Pomocí algoritmu C-Y-K rozhodněte, zda následující gramatika generuje slovo *kolaloka*.

$G = (\{S, A, B, D, C\}, \{k, o, a, l\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{llllllll}
P = \{ & S & \to & AB & \mid & DB, & & \\
 & A & \to & k & \mid & AB, & & \\
 & B & \to & o & \mid & BD & \mid & SC, \\
 & C & \to & a & \mid & AC & \mid & SA, \\
 & D & \to & l & \mid & DC & \mid & AC \;\}
\end{array}$$

Uzávěrové vlastnosti CFL

9.1 O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá

a) L_1, L_2 bezkontextové $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ je kontextový

b) L_1 bezkontextový $\wedge L_1 \cap L_2$ není bezkontextový $\Rightarrow L_2$ není bezkontextový

c) L_1 regulární $\wedge L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co{-}(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

d) L_1 konečný $\wedge L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co{-}(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

9.2 Jsou dané jazyky

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$$
$$R = L((a+b)^*a + \varepsilon)$$

Navrhněte PDA pro jazyk $L \cap R$. Jazyky L, R jsou akceptovány zásobníkovým a konečným automatem s těmito přechodovými funkcemi a koncovými stavy.

$$\begin{array}{lll}
\delta_L(q_0,x,Z) = \{(q_0,xZ)\} & \forall x \in \{a,b\} & \delta_R(p_0,a) = p_0 \\
\delta_L(q_0,x,y) = \{(q_0,xy)\} & \forall x,y \in \{a,b\} & \delta_R(p_0,b) = p_1 \\
\delta_L(q_0,\varepsilon,x) = \{(q_1,x)\} & \forall x \in \{a,b,Z\} & \delta_R(p_1,b) = p_1 \\
\delta_L(q_1,x,x) = \{(q_1,\varepsilon)\} & \forall x \in \{a,b\} & \delta_R(p_1,a) = p_0 \\
\delta_L(q_1,\varepsilon,Z) = \{(q_2,Z)\} & & \\
F_L = \{q_2\} & & F_R = \{p_0\}
\end{array}$$

9.3 Je dána bezkontextová gramatika
$G = (\{S\},\{a,b\},P,S)$, kde
$P = \{\ S \ \rightarrow\ aS \ \mid\ Sb \ \mid\ a\ \}$

a) Má tato gramatika vlastnost sebevložení?

b) Má jazyk generovaný gramatikou vlastnost sebevložení?

c) Je jazyk generovaný gramatikou regulární?

d) Jaký je vztah mezi vlastností sebevložení a regularitou?

9.4 Je dán bezkontextový jazyk L, $L \subseteq \{a,b\}^*$
Zkonstruujeme nový jazyk L_1 takto:

a) $L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a,b\}^*;\ xy \in L\}$

b) $L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a,b\}^*;\ yx \in L\}$

Dokažte, že L_1 je taky bezkontextový.

Konstrukce Turingových strojů

10.1 Navrhněte determinstický jednopáskový Turingův stroj rozhodující jazyk $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 1\}$

10.2 Navrhněte deterministický jednopáskový TM se vstupní abecedou $\{0, 1\}$ a takový, že výpočty na slovech tvaru 0^*1^* jsou akceptující a výpočty na ostatních slovech jsou nekonečné.

10.3 Navrhněte 3-páskový (vstupní + 2 pracovní pásky) TM pro jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

10.4 Navrhněte TM (determ. nebo nedeterm.) pro jazyk:

a) $L = \{a^i b^j c^k \mid k = ij, i, j \in \mathbb{N}\}$

b) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

c) $L = \{a^p \mid p$ není prvočíslo $\}$

d) $L = \{a^n w \mid w \in \{0, 1\}^*, w$ je binární zápis čísla $n\}$

Vztah TM a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

11.1 Objsaněte rozdíl mezi pojmy TM akceptuje a TM rozhoduje.

11.2 Je daný DTM T (resp. jeho část). Podle algoritmu ze skript navrhněte k němu ekvivalentní gramatiku:

$$\begin{array}{ll} \delta(q,\rhd) = (q,\rhd,R) & \delta(q,a) = (p,A,R) \\ \delta(p,b) = (q,a,L) & \delta(q,\sqcup) = (p,A,R) \\ \delta(p,\sqcup) = (q,a,L) & \delta(q,b) = (q_{accept},A,R) \end{array}$$

Kde $\rhd$ je levá koncová značka, $\sqcup$ označuje prázdné políčko, stavy jsou $\{p, q, q_{accept}\}$, q je počáteční stav, vstupní abeceda je $\{a, b\}$ a pásková abeceda odpovídá množině $\{\rhd, \sqcup, A, a, b\}$.

11.3 O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá.

a) R je regulární, L je rekurzivně spočetný $\Rightarrow R \cap L$ je regulární

b) L je rekurzivní $\Rightarrow$ co-L je rekurzivní

c) L je rekurzivní $\Rightarrow L^*$ je rekurzivní

d) L je kontextový $\Rightarrow$ co-L je rekurzivní

e) L není rekurzivní $\Rightarrow co-L$ není rekurzivní

f) L není rekurzivní a R je rekurzivní $\Rightarrow L \smallsetminus R$ není rekurzivní

g) L není rekurzivní, R je rekurzivní a $R \subseteq L \Rightarrow L \smallsetminus R$ není rekurzivní

11.4 Navrhněte gramatiky pro následující jazyky:

- $\{w \mid w \in \{a,b,c\}^*, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
- $\{ww \mid w \in \{a,b,c\}^*\}$
- $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n \mid n$ je mocnina $2\}$

11.5 Ukažte, že jazyk $L = \{w \mid w$ je kód dvojice (A, v) takové, že TM A zastaví svůj výpočet nad slovem $v\}$ je jazyk typu 0 dle Chomského hierarchie.

11.6 Existuje jazyk, který není ani jazykem typu 0 dle Chomského hierarchie?

Redukce

12.1 Rozhodněte, zda platí následující implikace. Své rozhodnutí zdůvodněte.

a) $A \leq_m B \Rightarrow co{-}A \leq_m co{-}B$

b) $A \leq_m B$ a B je regulární $\Rightarrow A$ je regulární

c) A je rekurzivně spočetná a $co{-}A \leq_m A \Rightarrow A$ je rekurzivní

d) A je rekurzivně spočetná a $A \leq_m co{-}A \Rightarrow A$ je rekurzivní

e) $A \leq_m B$ a A je rekurzivní $\Rightarrow B$ je rekurzivní

f) A je rekurzivně spočetná $\Rightarrow A \leq_m HALT$

12.2 Je dán jazyk $A = \{\langle M \rangle \mid$ výpočet TM M na slově ε je konečný$\}$.
Dokažte, že A není rekurzivní. (Návod: najděte redukci problému zastavení na A.)
Je jazyk A rekurzivně spočetný?
Je komplement jazyka A rekurzivně spočetný?

12.3 Nalezněte řešení následujícího Postova systému:

$$\left\{ \left[\frac{aa}{a}\right], \left[\frac{ab}{abab}\right], \left[\frac{b}{a}\right], \left[\frac{aba}{b}\right] \right\}$$

12.4 Ukažte, že Postův korespondenční problém je nerozhodnutelný, i když se omezíme na abecedu $\{0, 1\}$.

12.5 Ukažte, že problém ekvivalence dvou Turingových strojů

$$EQ = \{\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \mid \mathcal{M}_1 \text{ a } \mathcal{M}_2 \text{ jsou Turingovy stroje a } L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$$

je nerozhodnutelný.

Plán cvičení

1. cvičení: Operace nad jazyky

- Připomeňte pojmy abeceda, slovo, jazyk apod.
- Připomeňte základní operace nad jazyky a procvičte je s využitím příkladů 1.1 (průnik a sjednocení cvičit netřeba) a 1.2.
- Příklad 1.3 d) e) f) h). U d) vysvětlete, že neplatnost tvrzení dokazujeme protipříkladem.
- Příklad 1.4.
- V sudých skupinách cvičte příklad 1.5, v lichých příklad 1.6.
- Příklad 1.7.
- Příklad 1.8 b). Zdůrazněte, že dva jazyky jsou stejné, právě když platí obě inkluze $\subseteq$ a $\supseteq$. Jednu inkluzi dokažte.
- Příklad 1.8 c). Pozor, rovnost neplatí.

2. cvičení: Gramatiky, deterministické konečné automaty

- Připomeňte pojem gramatiky a cvičte příklad 1.9 a) anebo b).
- Příklad 1.11 a) d).
- Příklad 2.1.
- Příklad 2.2 a) b) c) d). Dejte prosím studentům možnost, aby se pokusili alespoň nějaký automat sestrojit sami. Pozor, automaty musí být deterministické.
- Příklad 2.3 a) b).
- Pokud vám zbyde čas, cvičte příklad 2.5 a následně zbylé části příkladu 1.11 nebo příklad 2.7.

3. cvičení: Pumping lemma a Myhillova-Nerodova věta

- Zopakujte Pumping lemma.
- Příklad 2.6. Z lehčích příkladů a)–c) udělejte jeden pořádně, ostatní zrychleně. Dále udělejte pořádně příklad g) a zrychleně příklad e). Upozorněte studenty, že vlastní text důkazu sice zůstává v podstatě stejný (důkaz lze prezentovat jako formulář, který se vždy na pár místech doplní), ale zároveň je nedílnou součástí důkazu a nelze vynechat.
- Zopakujte Myhillovu-Nerodovu větu a pojmy, které využívá. Zdůrazněte následující aspekty:
  1. Z DFA lze odvodit pravou kongruenci s konečným indexem takovou, že L je sjednocení nějakých tříd ekvivalence. Zopakujte, jak se to dělá.

2. Z takové pravé kongruence lze odvodit DFA (samotná kongruence neurčuje koncové stavy, ty určí až L). Zopakujte, jak se to dělá.
3. Pro každý jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ (i neregulární) je $\sim_L$ vždy pravá kongruence a L je sjednocením nějakých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$. Má-li $\sim_L$ konečný index, lze sestrojit DFA pro L a L je tudíž regulární.
4. $\sim_L$ je nejhrubší ze všech pravých kongruencí $\sim$ takových, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$.

- Příklad 3.9.
- Příklad 3.12.

4. cvičení: Myhillova-Nerodova věta

- Zkontrolujte znalost Myhillovy-Nerodovy věty a pojmů, které využívá.
- Příklad 3.10. Jednu odrážku udělejte pořádně, ostatní zrychleně.
- Příklad 3.8. Udělejte jednu odrážku. Pak zkuste totéž pro jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^* \cdot \{d\}^*$ a upozorněte, že přestože index $\sim_L$ je 5, existuje pro L deterministický FA se čtyřmi stavy. Problém je v tom, že tento automat není totální a tudíž není minimální.
- Příklad 3.13.

5. cvičení: Minimalizace a kanonizace konečných automatů, nedeterministické automaty, determinizace, odstranění ε-kroků

- Zdůrazněte, že před minimalizací automatu je třeba odstranit nedosažitelné stavy a ztotálnit přechodovou funkci.
- Příklad 3.2 b).
- Budete-li mít pocit, ze jeden příklad na minimalizaci nestačil, pokračujte příkladem 3.1 a) a případně 3.3.
- Zopakujte nedeterministické FA.
- Příklad 3.4 a) c) d).
- Zopakujte determinizaci.
- Příklad 3.5 a) nebo b). Upozorněte, že determinizací může vzniknout stav $\emptyset$ a jeho následníci se počítají běžným způsobem.
- Zopakujte odstranění ε-kroků.
- Příklad 4.5. Příklad řešte pomocí tabulkového zápisu. Chcete-li, můžete nejdřív ukázat, jak snadno se v tom udělá chyba, když se to dělá přímo na grafu.
- Budete-li mít pocit, že příklad 4.5 nestačil, pokračujte příkladem 4.7 (obvykle stačí spočítat jen pár řádků).
- Zbude-li čas, udělejte ostatní části příkladu 3.4.

6. cvičení: Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

- Zopakujte, na které operace jsou regulární jazyky uzavřené. Diskutujte, na které operace je/není uzavřena třída konečných jazyků. Zkuste navrhnout operaci, na kterou nebude třída regulárních jazyků uzavřená.
- Příklad 5.8. Tento příklad ukazuje, že konečná změna jazyka (tj. přidání či odebrání konečně mnoha slov) nemá vliv na jeho (ne)regularitu. Toto pozorování lze použít v dalších příkladech, např. v příkladu 5.3.
- Příklad 5.1.

- Dokažte uzavřenost neregulárních jazyků na komplement (včetně formálního důkazu).
- Příklad 5.2.
- Příklad 5.3. Pro všechny části s vyjímkou f) uveďte dvojici neregulárních jazyků, kdy výsledek operace je regulární a dvojici, kdy výsledek není regulární.
- Příklad 5.4.
- Příklad 5.5 a) b) c) d).
- Rozhodněte, zda platí následující implikace. Odpověď zdůvodněte.
  a) $L \cap L^R$ je regulární $\Rightarrow$ L je regulární
  b) $L \cap L^R$ není regulární $\Rightarrow$ L není regulární
- Příklad 5.6.
- Udělejte příklad 4.12 a) a ukažte, proč b) nevyjde stejně.

7. cvičení: Regulární výrazy, převody formalismů pro popis regulárních jazyků

- Příklad 4.8. Stačí 2 odrážky.
- Příklad 4.9.
- Příklad 4.10.
- Příklad 4.11.
- Příklad 4.2.
- Příklad 4.4.

8. cvičení: Bezkontextové gramatiky, derivační stromy, jednoznačnost, redukované gramatiky

- Příklad 6.11 a).
- Příklad 6.1. U druhé gramatiky neztrácejte moc času, příklad slouží jen jako demonstrace popisné síly bezkontextových gramatik.
- Příklad 6.2.
- Příklad 6.3.
- Příklad 6.5.
- Příklad 6.6. Není třeba formálně dokazovat, že je navržená gramatika jednoznačná. Slovní argumentace postačí.
- Příklad 6.7. Stačí identifikovat problém.
- Příklad 6.8. Připomeňte, že nejdříve je třeba odstranit nenormované symboly a až pak ty nedosažitelné. Opačné pořadí může vyústit v neredukovanou gramatiku, což lze ukázat i na příkladu 6.8.
- Zbyde-li čas, dělejte další odrážky z příkladu 6.11.

9. cvičení: Transformace bezkontextových gramatik

- Příklad 7.2.
- Příklad 7.5.
- Příklad 7.6.
- Příklad 7.8 a). Pokud stíháte, udělejte i část b).
- Připomeňte odstranění přímé levé rekurze na pravidlech $A \to Ab \mid Ac \mid dA \mid e$.
- U příkladů na odstranění levé rekurze vždy explicitně zdůrazněte pořadí netermínálů, které uvažujete.
- Příklad 7.13. Spočítejte jen odstranění levé rekurze.
- Příklad 7.12. Tento příklad spočítejte včetně transformace do GNF.
- Na příkladu 7.14 (bez transformace do 3GNF) připomeňte, že dle algoritmu vyjde gramatika s jediným pravidlem $S \to aS$, neboť gramatika generuje prázdný jazyk.

10. cvičení: Pumping lemma pro bezkontextové jazyky, zásobníkové automaty, nedeterministická syntaktická analýza

- Příklad 7.15. Jednu odrážku udělejte pečlivě, v dalších se soustřeďte jen na to podstatné.
- Skripta uvádějí alterativní notaci přechodové funkce PDA: namísto $\delta(p, a, Z) = \{(q_1, \gamma_1), \ldots, (q_n, \gamma_n)\}$ lze psát $pZ \xrightarrow{a} q_1\gamma_1 \mid \ldots \mid q_n\gamma_n$. Tuto notaci představte například při zadávání následujícího příkladu.
- Příklad 8.1 a) c).
- Příklad 8.3. Udělejte pořádně aspoň dvě odrážky včetně c). Zbude-li čas, můžete se na konci k dalším odrážkám vrátit.
- Příklad 8.6. Ukažte, jak lze konstrukci analyzátoru shora dolů použít u příkladů na konstrukci PDA: nejdřív se zkonstruuje CFG a z ní pak lehce PDA. Velmi elegantně tak lze řešit třeba příklad 8.3 c).

11. cvičení: Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků, konstrukce Turingových strojů

- Příklad 9.1.
- Příklad 9.2. Není nutné dotáhnout do konce, ale ukázat ε-krok.
- Příklad 9.3.
- Příklad 9.4.
- Připomeňte, jak fungují Turingovy stroje.
- Příklad 10.1.
- Příklad 10.2.
- Příklad 10.3.
- Příklad 10.4. Stačí zformulovat myšlenky.

12. cvičení: Vztah Turingových strojů a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

- Příklad 11.1.
- Diskutujte pojmy *Turingův stroj akceptuje/rozhoduje* a jejich vztah ke gramatikám typu 0.
- Příklad 11.2.
- Příkald 11.3.
- Příklad 11.4.
- Příklad 11.5.
- Příklad 11.6.

Řešení některých příkladů

Formální jazyky, regulární gramatiky

1.1 **a)** $\{xy, y, yx, z\}$ **b)** $\{y\}$ **c)** $\{xyy, xyz, yy, yz, yxy, yxz\}$, $\{yxy, yy, yyx, zxy, zy, zyx\}$
d) $\{\varepsilon\}$, $\{y, z\}$, $\{yy, yz, zy, zz\}$, $\{yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz\}$,
$\{\varepsilon, y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \ldots\}$ tj. libovolné slovo z písmenek y a z včetně ε,
$\{y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \ldots\}$ tj. libovolné slovo z písmenek y a z kromě ε
e) $\{x, y, z\}^* \smallsetminus \{y, z\}$ tj. libovolné slovo složené z písmenek x, y a z včetně ε, kromě slov y a z

1.2 **a)** $\{\varepsilon\}$, $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon\}$ **b)** $\{\varepsilon\}$, $\emptyset$, $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ pokud $\varepsilon \in L$ jinak $\emptyset$ **c)** $\emptyset$, $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, L

1.3 **a)** $\{a, aa, ba, abc, \varepsilon\}$ **b)** $\{a, ba\}$ **c)** $\{aba, aabc, aa, a, aaba, aaabc, aaa, baba, baabc, baa, ba\}$ **d)** ne, protipříklad $aabc \in L_1 \cdot L_2 \smallsetminus L_2 \cdot L_1$ **e)** jedno slovo z množiny $\{a, aa, ba, aba, aaa, baba, baa\}$ **f)** ano, protože $\varepsilon \in L_2$; ne, protipříklad $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$; pro pokročilé: implikace "$\Longrightarrow$" platí, implikace "$\Longleftarrow$" platí pouze v upravené podobě $\varepsilon \in L_2 \Longleftarrow (L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge L_1 \neq \emptyset)$ **g)** ano, ano, ne **h)** všechna slova nad danou abecedou, kromě slov z jazyka L_2, formálně: $\{a, b, c, d\}^* \smallsetminus L_2$

1.4 **a)** Neplatí. Protipříklad: $L = \{aa, bb\}$, $i = 2$, $L^i = \{aaaa, aabb, bbaa, bbbb\}$, $\{w^i \mid w \in L\} = \{aaaa, bbbb\}$
b) Neplatí. Protipříklad: $L = \{aa\}$, $L^2 = \{aaaa\}$, ale $|aaaa| \neq 2$ **c)** $L = \{a\}$

1.5 $L_1 = L_4 = L_5 \supsetneq L_2$, $L_1 = L_4 = L_5 \supsetneq L_3$, $L_1 = L_4 = L_5 \supsetneq L_6$, neporovnatelné: L_2, L_3, L_6
L_1 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$
L_2 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$ tvaru $xyzxyzxyz \ldots xyz$
L_3 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, ve kterých jsou všechna x před všemi y a z a všechna y před všemi z
L_4 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
L_5 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x, y\}^* \cup \{z\}^*$
L_6 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, která obsahují alespoň jeden výskyt x

1.6 $L_1 = L_5 \supsetneq L_2 \supsetneq L_6$, $L_1 = L_5 \supsetneq L_3 \supsetneq L_4$, $L_2 \supsetneq L_4$, neporovnatelné: L_2 a L_3, L_6 a L_3, L_6 a L_4
L_1 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$
L_2 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, kromě ε
L_3 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, ve kterých jsou všechna x před všemi y a z a všechna y před všemi z
L_4 – ty slova z L_3, která mají právě 2 výskyty y
L_5 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
L_6 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, která obsahují alespoň jeden výskyt x

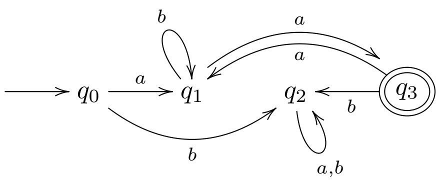
1.7 **a)** $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$ **b)** $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*$ **c)** $L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ **d)** $L_1 \cup L_2 \cup L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cup L_2 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ a pokud naznáme, že ε také začíná a končí stejným znakem, je třeba k řešení přidat $\cup (L_1^* \cap L_2^*)$ **e)** $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$ **f)** $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^* \cap L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ **g)** $((L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*)^C$

1.8 **a)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **b)** ano, nutno dokázat obě inkluze $\subseteq$ a $\supseteq$ **c)** ne, $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{ab\}$ a $L_3 = \{b, \varepsilon\}$ **d)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **e)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **f)** ano, nutno dokázat obě inkluze $\subseteq$ a $\supseteq$ **g)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$

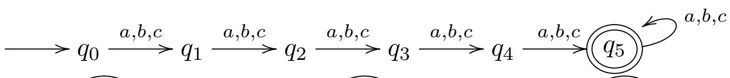
1.9 **a)** $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, typu 0 **b)** $\{b, c\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a, b, c\}^+$, typu 3 (regulární)

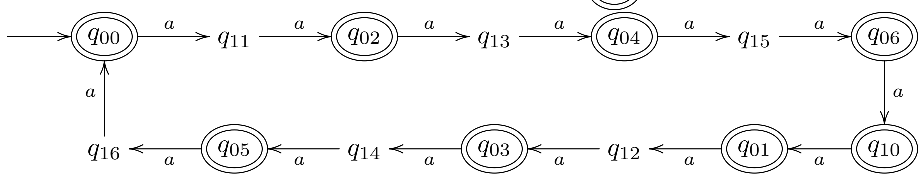
1.10 $\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 2j; j, k \in \mathbb{N}_0\}$, dolní indexy u navržených neterminálů představují zbytek po dělení počtu 'a' (resp. 'b') dvěma

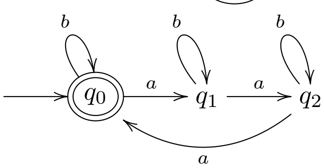
Deterministické konečné automaty, pumping lemma

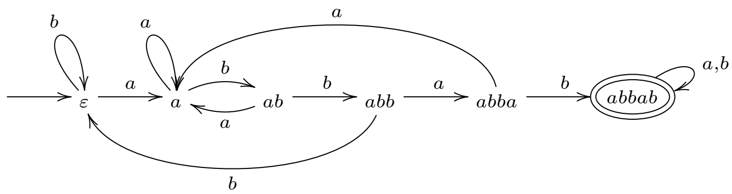
2.1 a) 

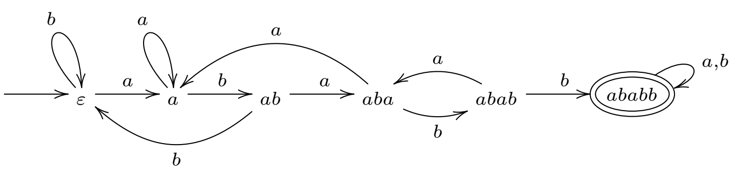
b) $L = \{a\} \cdot \{b, aa\}^* \cdot \{a\}$ **c)** $L = (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{aa\})^* \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot (\{a\} \cup \{ab\} \cdot \{a,b\}^*) \cup \{b\} \cdot \{a,b\}^*)$

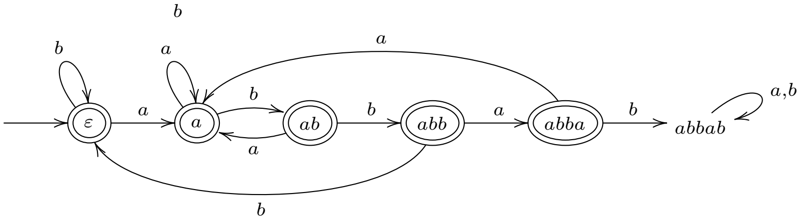
2.2 a) 

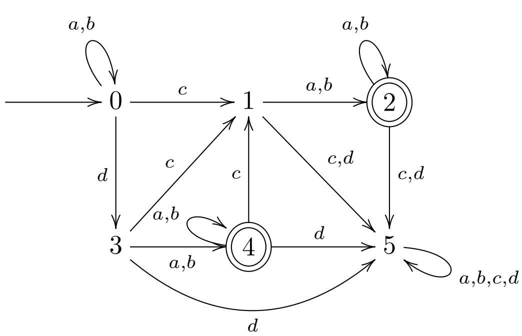
b) 

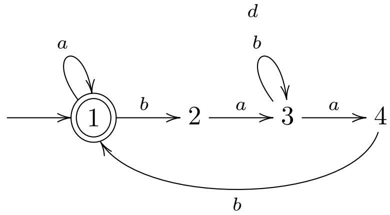
c) 

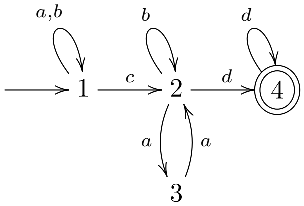
d) 

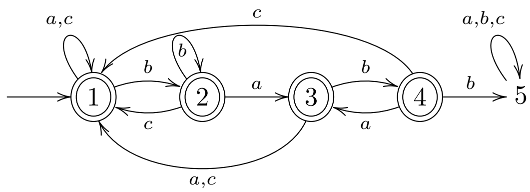
e) 

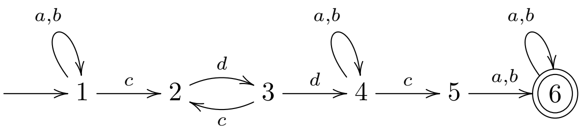
f) 

g) 

h) 

2.3 a) 

b) 

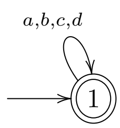
c) 

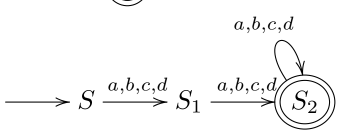
2.4 $L = \{a\}.\{b\}^*.\{a\}.(\{c\}.\{d\})^* \cup \{b\}$

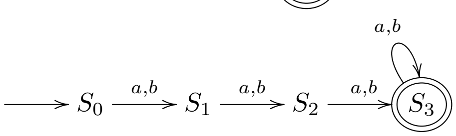
2.5 $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \wedge w = u.v \Rightarrow |\#_a(u) - \#_b(u)| \leq 3\}$

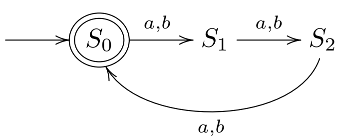
2.6 U příkladu **e)** je třeba volit slovo $a^n b^{n!+n}$.

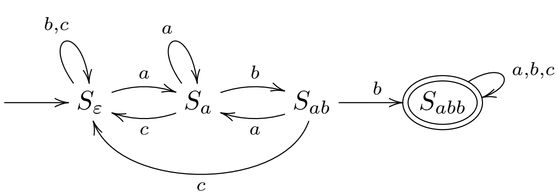
2.7 Příklad **a)** je regulární, **b)** není, jako slovo lze zvolit například $a^n c b^{n+1}$.

2.9 a) 1.11a 

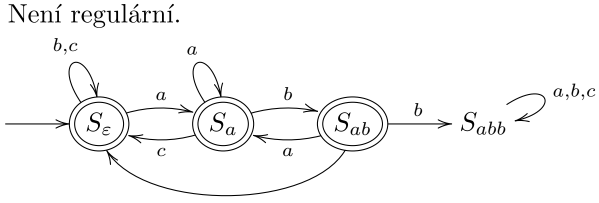
1.11b 

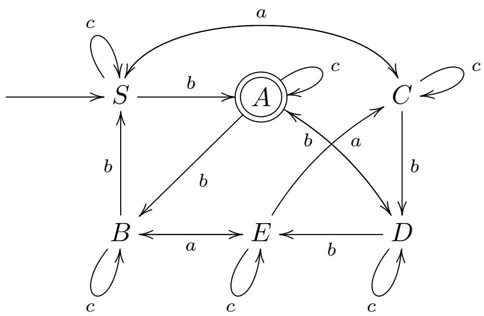
1.11c 

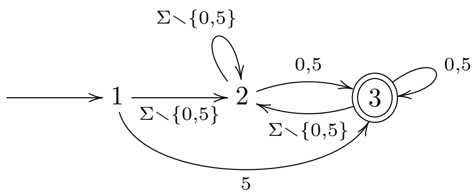
1.11d 

1.11e 

1.11f Není regulární.

1.11h 

1.11i 

1.11j 

Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhillova-)Nerodova věta

3.1 a)

	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	4	2
3	3	4
$\leftarrow 4$	3	2

b)

	a	b
$\leftrightarrow 1$	2	3
2	2	3
3	3	4
$\leftarrow 4$	4	3

3.2 a)

	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	3	1
3	3	4
4	3	5
$\leftarrow 5$	6	5
6	4	6

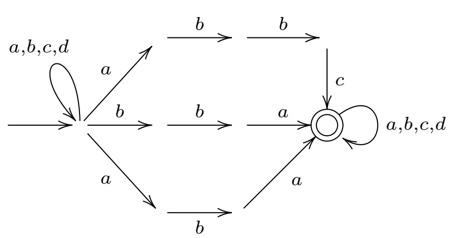
b)

	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	4	2
$\leftarrow 3$	2	3
$\leftarrow 4$	5	2
5	6	3
6	6	6

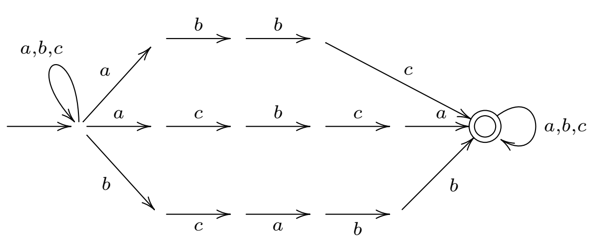
Výsledné automaty v obou případech nejsou ekvivalentní automatům uvedeným v zadání vpravo.

3.3 Není.

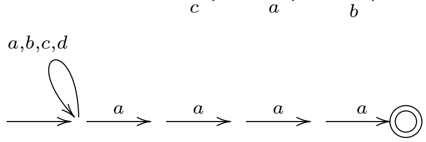
3.4 a)



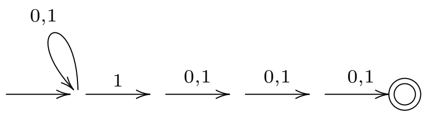
b)



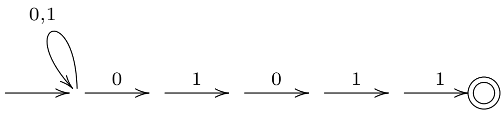
c)



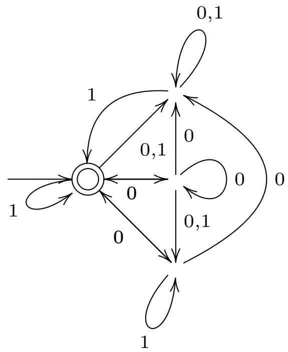
d)



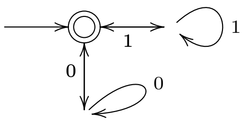
e)



f)



g)



3.5 a)

		a	b	c
$\rightarrow$	[1]	[23]	[34]	[1]
$\leftarrow$	[23]	[123]	[14]	[234]
	[34]	[123]	[1]	[34]
$\leftarrow$	[123]	[123]	[134]	[1234]
	[14]	[123]	[134]	[134]
$\leftarrow$	[234]	[123]	[14]	[234]
	[134]	[123]	[134]	[134]
$\leftarrow$	[1234]	[123]	[134]	[1234]

b)

		a	b	c
$\rightarrow$	[1]	[12]	[1]	[]
$\leftarrow$	[12]	[12]	[13]	[1]
	[]	[]	[]	[]
	[13]	[12]	[1]	[14]
	[14]	[125]	[1]	[]
$\leftarrow$	[125]	[12]	[136]	[1]
	[136]	[127]	[1]	[14]
$\leftarrow$	[127]	[12]	[13]	[1]

3.6 $(\{a,b\}.\{b\} \cup \{a,b\}.\{b\}.\{a,b\})^*.\{a,b\}.\{b\}$

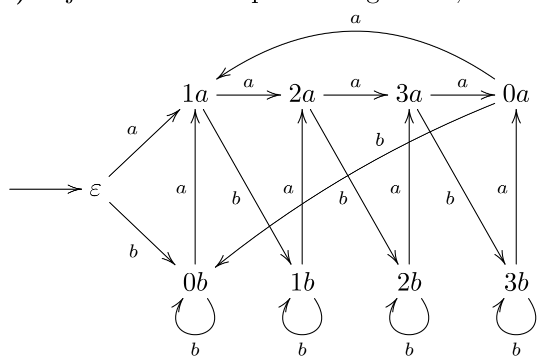
3.8 a) Předpokládejme, že takový automat existuje. Pak ze slov a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 musejí dvě nutně padnout do stejné třídy rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$. Označme je a^i, a^j $(i \neq j)$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $i < j$. Pak platí
$a^i.a^{4-j} = a^{4+i-j} \notin L$
$a^j.a^{4-j} = a^4 \in L$,
a tedy $a^i \not\sim_L a^j \Rightarrow |\sim_L| \geq 5$.
b) Analogicky jako v a).

3.10 a) Důkaz sporem. Předpokládejme, že L je regulární. Pak prefixová ekvivalence $\sim_L$ má konečný index, označme jej n. Pak ovšem ze slov $a, a^2, a^4, \ldots, a^{2^n}$ nutně musí některá dvě slova padnout do stejné třídy rozkladu, označme je a^k, a^l (BÚNO $k \neq l$). Po přiřetězení slova a^k dostáváme slovo $a^k a^k \in L$ a slovo $a^l a^k \notin L$. Tím je dosažen spor s $a^k \sim_L a^l$ a proto L není regulární.
b) Analogicky. Ze slov $a, a^2, \ldots, a^n, a^{n+1}$ musí být alespoň dvě ekvivalentní. Nechť $a^k \sim_L a^l$ (BÚNO $k < l$). Ovšem $a^k.b^k \in L, a^l.b^k \notin L$.
c) Analogicky. Ze slov $abb, a^2bb, \ldots, a^{n+1}bb$ musí být alespoň dvě ekvivalentní. Nechť $a^kbb \sim_L a^lbb$ (BÚNO $k \neq l$). Ovšem $a^kbb.a^k \in L, a^lbb.a^k \notin L$.
d) Analogicky. Ze slov $\varepsilon, a, a^2, \ldots, a^n$ musí být alespoň dvě ekvivalentní. Nechť $a^k \sim_L a^l$ (BÚNO $k < l$). Ovšem $a^k.b^k \notin L, a^l.b^k \in L$.

3.11 Definujeme binární relaci $\sim$ takto: $u \sim v \iff \#_a(u) \equiv \#_a(v) \pmod 3$
$\sim$ je ekvivalence, $\sim$ je pravá kongruence, $|\sim| = 3$, tedy má konečný index, $L = \{w \mid \#_a(w) \mod 3 = 0\}$

3.12 a) 4 **b)** nemá konečný index

3.13 **a)** $\sim$ je ekvivalence i pravá kongruence, index je 4. L může být libovolný jazyk, jehož minimální automat odpovídá přímo relaci $\sim$. Takových jazyků je 12, což je vidět po nakreslení automatu (bez akceptujících stavů) podle $\sim$ a zvážení, pro které označení koncových stavů je automat minimální. Jazyky L' jsou právě ty, které lze popsat stejným automatem, ale s takovou množinou koncových stavů, při které automat není minimální. Např. $L' = \{a, b\}^*$.
b) $\sim$ není ekvivalence (není tranzitivní).
c) $\sim$ je ekvivalence i pravá kongruence, index je 9. Lze podle ní sestavit tento automat:



Je vidět, že automat nebude při žádném označení koncových stavů minimální: stavy $\varepsilon, 0a, 0b$ mají stejné přechody a vždy budou alespoň dva z nich označeny jako akceptující nebo neakceptující a tudíž ty dva stavy budou jazykově ekvivalentní. Naopak L' může být jakýkoliv jazyk rozpoznávaný uvedeným automatem s libovolným označením koncových stavů. Takových jazyků L' je tedy celkem 2^9.

Regulární gramatiky a výrazy $\Leftrightarrow$ FA, ε-kroky, Kleeneho věta

4.1

	a	b	c
$\leftrightarrow \overline{S}$	$\{\overline{A}, q_f\}$	$\{\overline{C}\}$	$\emptyset$
$\overline{A}$	$\{\overline{A}\}$	$\{\overline{B}, q_f\}$	$\{q_f\}$
$\overline{B}$	$\{\overline{B}, \overline{C}\}$	$\{\overline{C}\}$	$\{\overline{A}, q_f\}$
$\overline{C}$	$\{\overline{A}, q_f\}$	$\{\overline{B}, q_f\}$	$\emptyset$
$\leftarrow q_f$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

4.2

	a	b	c
$\rightarrow \overline{S}$	$\{\overline{X}\}$	$\{\overline{Y}\}$	$\{q_f\}$
$\overline{X}$	$\emptyset$	$\{\overline{S}, \overline{X}\}$	$\emptyset$
$\overline{Y}$	$\emptyset$	$\{\overline{S}\}$	$\{\overline{Z}\}$
$\overline{Z}$	$\{\overline{S}\}$	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$
$\leftarrow q_f$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

4.5

	a	b	c	d
$\leftrightarrow 0$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3, 4\}$
1	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3, 4\}$
$\leftarrow 2$	$\{3, 4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\{3, 4\}$	$\{2\}$	$\emptyset$
4	$\emptyset$	$\{3, 4\}$	$\{2\}$	$\emptyset$

4.7

	a	b	c
$\rightarrow 1$	$\{1,2,5,6\}$	$\{2,3,5,6\}$	$\emptyset$
2	$\{2,5,6\}$	$\{2,3,5,6\}$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\{2,6\}$	$\emptyset$
4	$\{1,2,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{2,3,6\}$
5	$\{2,5,6\}$	$\{2,3,5,6\}$	$\{2,3,6\}$
$\leftarrow 6$	$\{2,5,6\}$	$\{2,3,5,6\}$	$\{2,3,6\}$

4.11 **a)** $(a+b)^*ab$ **b)** $b^*(ab^*ab^*)^*$ **c)** $a(a+b)^*a+b(a+b)^*b+a+b$ (pokud ε také začíná a končí stejným symbolem, přičteme ještě ε) **d)** $((a+b)(a+b))^*$

4.12 **a)** M_1 je třída všech konečných jazyků.

b) Nechť Σ_1 je nějaká abeceda. Pak $C(\Sigma_1)$ definujeme jako množinu všech slov, kde se každé písmeno z abecedy vyskytuje aspoň jednou, tj.

$$C(\Sigma') = \{w \in \Sigma_1^* \mid \forall a \in \Sigma_1 : \#_a(w) > 0\}.$$

Pak M_2 je třída všech jazyků L takových, že pro všechny Σ_1, které jsou podmnožinou abecedy jazyka L, platí: $L \cap C(\Sigma_1)$ je konečný nebo $C(\Sigma_1) \smallsetminus L$ je konečný.

Poměrně snadno se ukáže, že M_2 všechny takové jazyky musí obsahovat a že je tato třída zároveň uzavřená na sjednocení, průnik a komplement.

c) M_3 je třída všech konečných jazyků.

Uzávěrové vlastnosti $\mathcal{R}$

5.1 Neplatí. Jazyky $L_i = \{a^ib^i\}$ pro každé $i > 0$ jsou konečné a tudíž regulární, ale $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \{a^nb^n \mid n > 0\}$ není regulární.

5.2 $L_i = \{a,b\}^* \smallsetminus \{a^ib^i\}$ pro každé $i > 0$. Pak $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \{a,b\}^* \smallsetminus \{a^nb^n \mid n > 0\}$, což není regulární jazyk, protože $\{a^nb^n \mid n > 0\}$ není regulární jazyk a regulární jazyky jsou uzavřené na doplněk.

5.3 Neregulární jazyky jsou uzavřené na komplement. U všech ostatních operací lze najít jazyky takové, že výsledkem je neregulární jazyk, i takové, že výsledek je regulární. Nechť $R = \{a^nb^n \mid n > 0\}$ je jazyk nad $\Sigma = \{a,b\}$. R jistě není regulární.

operace	regulární výsledek	neregulární výsledek
$L_1 \cap L_2$	$R \cap co{-}R = \emptyset$	$R \cap R = R$
$L_1 \cup L_2$	$R \cup co{-}R = \Sigma^*$	$R \cup R = R$
$L_1 \smallsetminus L_2$	$R \smallsetminus R = \emptyset$	$R \smallsetminus co{-}R = R$
$L_1 \cdot L_2$	$(R \cup \{\varepsilon\}) \cdot co{-}R = \Sigma^*$	$R \cdot R$
L_1^*	$(co{-}R)^* = \Sigma^*$	R^*

5.4 Platí.

5.5 Ani jedna implikace neplatí.

5.6 Stačí zvolit L_1 jako libovolný neregulární jazyk a L_2 jako doplněk L_1.

Bezkontextové gramatiky

6.1 **a)** $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ **b)** Jazyk se nedá moc rozumně popsat.

6.4 Ano, každý regulární jazyk je jednoznačný CFL.

6.7 Nelze. Průnik podmínek (slova s nejednoznačným odvozením) nelze popsat bezkontextovou gramatikou (nelze formulovat podmínky disjunktně tak, aby šly popsat pomocí pravidel bezkontextových gramatik).

Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.9 Minimální i maximální délka odvození je $2n-1$.

Zásobníkové automaty, C-Y-K

8.1 **b)** Ve skriptech je pro PDA definován pojem *krok výpočtu*, ale nikoliv pojem *výpočet*. Lze si představit hned několik definic, které kromě zjevných požadavků (začínáme v iniciální konfiguraci pro daný vstup a každé dvě po sobě jdoucí konfigurace jsou v relaci krok výpočtu) splňují i tyto: (i) Musí se přečíst celý vstup; V tom případě by v příkladu existoval jen 1 výpočet. (ii) Výpočet musí pokračovat "dokud to lze". V tomto případě existují 4 výpočty. (iii) Stačí přečíst libovolnou část vstupu. V tom případě je výpočtů hodně. **c)** $L(A) = \{a^{i+j}b^ic^j, a^{i+j}b^id^j \mid i,j > 0\}$

8.2 **a)** $\{a^ib^j \mid i > j > 0\}$

8.10 C-Y-K tabulka:

	1	2	3	4	5	6	7	8
8	S,A,B,C,D							
7	S,A,B,C,D	B						
6	S,A	B	S,D					
5	S,A,B	-	D	-				
4	S,A,B,C,D	B	-	-	S,B			
3	S,A	B	-	-	C	B		
2	S,A	B	D	-	S	-	C,D	
1	A	B	D	C	D	B	A	C
	k	o	l	a	l	o	k	a

Uzávěrové vlastnosti CFL

9.3 **a)** ano **b)** ne **c)** ano **d)** třída bezkontextových jazyků bez vlastnosti sebevložení se rovná třídě regulárních jazyků

Konstrukce Turingových strojů

10.2 Návod: TM bude donekonečna číst vstupní pásku a posouvat se vpravo, nebo bude ve dvou krocích opakovaně posunovat hlavu vlevo a vpravo.

Vztah TM a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

11.3 **a)** Neplatí. Stačí vzít libovolný neregulární rekurzivně spočetný L nad abecedou Σ a $R = \Sigma^*$. **b)** Platí (viz. skripta). **c)** Platí (viz. skripta). **d)** Platí. **e)** Platí. **f)** Neplatí. Stačí vzít $R \supseteq L$. **g)** Platí. Plyne z uzavřenosti rekurzivních jazyků na sjednocení.

11.4 **a)** $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde množina pravidel P obsahuje následující pravidla.

$$
\begin{array}{lllll}
S \to ABCS \mid \varepsilon & AB \to BA & AC \to CA & BC \to CB & A \to a \\
 & BA \to AB & CA \to AC & CB \to BC & B \to b \\
 & & & & C \to c
\end{array}
$$

Lze snadno upravit na kontextovou gramatiku.

b) $G = (\{S', S, A, B, C, K\}, \{a, b, c\}, P, S')$, kde množina pravidel P obsahuje následující pravidla.

$$
\begin{array}{llll}
S' \to SK & Aa \to aA & Ba \to aB & Ca \to aC \\
S \to aSA \mid bSB \mid cSC \mid \varepsilon & Ab \to bA & Bb \to bB & Cb \to bC \\
K \to \varepsilon & Ac \to cA & Bc \to cB & Cc \to cC \\
 & AK \to aK & BK \to bK & CK \to cK
\end{array}
$$

c) Kontextová gramatika: $G = (\{S', S, B, \text{🏛}\}, \{a, b, c\}, P, S')$, kde P obsahuje následující pravidla.

$$
\begin{aligned}
S' &\to S \mid \varepsilon \mid abc, \\
S &\to aBSc \mid a\text{🏛}c, \\
Ba &\to aB, \\
B\text{🏛} &\to \text{🏛}b \mid bb
\end{aligned}
$$

11.6 $L = \{w \mid w$ je kód dvojice (A, v) takové, že TM A nezastaví svůj výpočet nad slovem $v\}$

Redukce

12.1 **a)** Platí (přímo z definičního vztahu). **b)** Neplatí. $A = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$, $B = \{0\}$, $f(x) = 0$ pokud x je tvaru ww, $f(x) = 1$ jinak. **c)** Platí. **d)** Platí (připomeňme, že $A \leq_m B$ implikuje $co{-}A \leq_m co{-}B$). **e)** Neplatí. $A = \emptyset$, B je problém zastavení. $f(x) = y$, kde y je libovolné slovo nad $\{0, 1, \#\}$, které neleží v B. **f)** Platí. $f(w) = \langle M', w\rangle$, kde M' je TM akceptující A takový, že místo do zamítajícího stavu začne cyklit. Tedy M' akceptuje w právě když zastaví. Funkce $f(w) = \langle M, w\rangle$, kde M je libovolný zvolený TM akceptující A naopak redukcí být nemusí (např. pokud je A rekurzivní a M je úplný).

12.2 A není rekurzivní, protože na něj lze redukovat problém zastavení. A je rekurzivně spočetný (lze ukázat přímo nebo redukcí na problém akceptování). $co{-}A$ není rekurzivně spočetný (A by pak byl rekurzivní).

12.3 Řešením je posloupnost $2, 2, 4, 3, 3, 1, 1$.

12.4 Lze ukázat redukcí běžného PCP na problém ze zadání.

12.5 Lze ukázat redukcí $co{-}NONEMPTY$ na EQ. $NONEMPTY = \{\langle\mathcal{M}\rangle \mid \mathcal{M}$ je TM a $L(\mathcal{M}) \neq \emptyset\}$ je problém neprázdnosti, který je nerozhodnutelný a tudíž i jeho doplněk je nerozhodnutelný.