Seminár 2: Funktory a Prirodzené Transformácie

Funktor $F : C \to D$

- Zobrazenie z kategórie C do kategórie D.
- Skladá sa z
  1. Objektového zobrazenia : $O_C \to O_D$
     $a \to Fa$
  2. Zobrazenia morfizmov : $a, b \in O_C, C(a, b) \to D(Fa, Fb)$
     $f \to Ff$
- Zachováva štruktúru :
  1. $F(id_a) = id_{Fa}$
  2. $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$

Špeciálne funktory

Vlastnosti definované na základe oboch zobrazení.

- Injektívny - objektové zobrazenie je injektívne
- Surjektívny - objektové zobrazenie je surjektívne
- $Faithful$ - každé zobrazemie morfizmov je injektívne
- $Full$ - každé zobrazemie morfizmov je surjektívne
- Endofunktor - funktor do rovnakej kategórie, napr. $F : C \to C$

Zároveň hovoríme, že ak morfizmus Ff alebo objekt Fa má nejakú vlastnosť implikuje, že morfizmus f alebo objekt a mal danú vlastnosť, tak funktor reflektuje ($Reflects$) danú vlastnosť. Môžeme zachovávať napríklad terminalitu / inicialitu objektov alebo epi / mono pre morfizmy.

Veta : $Faithful$ funktor reflektuje epi/ mono pre morfizmy.

Príklady funktorov

- Identický $id_C : C \to C$

  $o \in O_C : id_c(o) = o$
  $f \in Hom(a, b) : id_c(f) = f$
- Konštantný $\Delta_d : C \to D, d \in D$

  $o \in O_C : \Delta_d c(o) = d$
  $f \in Hom(a, b) : \Delta_d(f) = id_d$

Prirodzené transformácie

- pre kategórie C, D a funktory $F, G : C \to D$ definujeme prirodzenú transformáciu $\mu = \{\mu_a \in D(Fa, Ga) | a \in O_C\}$
- μ_a sa nazýva komponenta prirodzenej transformácie μ v a
- Transformácia musí splňovať $Naturality\ condition$, podmienku prirodzenosti, $\mu_b \circ Ff = Gf \circ \mu_a$, ktorú zadáva $Naturality\ square$:

$$\begin{tikzcd}
 & Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\mu_a"] & Fb \arrow[d, "\mu_b"] & \\
 & Ga \arrow[r, "Gf"] & Gb & \\
a \arrow[uur, "F"] \arrow[ur, "G"] \arrow[rrr, "f"] & & & b \arrow[uul, "F"'] \arrow[ul, "G"']
\end{tikzcd}$$

- Prirodzená transformácia medzi G, F nemusí existovať, napríklad ak medzi Fa a Ga neexistuje žiaden morfizmus. Zároveň ich môže existovať viacero, kedže medzi Fa a Ga môže existovať viacero morfizmov.
- Vzhľadom na to, že prirodzené transformácie sú znova morfizmy môžeme zadefinovať kategóriu, v ktorej funktory $C \to D$ budú objekty a prirodzené transformácie budú morfizmy.

Príklady z Haskellu

- Funktory sa v Haskelli vyskytujú napríklad ako typové konštruktory, ktoré sú doplnené ešte o funkciu, transformujúcu morfizmy týchto typov. Takto sa dá zadefinovať napríklad Maybe :

  Data Maybe a = Nothing | Just a

  $fmap_{Maybe} :: (a \to b) \to (Maybe\ a \to Maybe\ b)$

  $fmap_{Maybe}$ f Nothing = Nothing

  $fmap_{Maybe}$ f (Just x) = Just (f x)

- V haskelli je tiež možné aj abstrahovať našu ideu funktoru za použitia typvej triedy typových konštruktorov.

  class Functor f where

  $\quad fmap :: (a \to b) \to f\ a \to f\ b$

  potom teda môžeme zadefinovať naše Maybe ako instanciu Funktoru

  instance Functor Maybe where

  $\quad fmap\ f\ Nothing = Nothing$

  $\quad fmap\ f\ (Just\ x) = Just\ (f\ x)$

  alebo môžeme zadefinovať napríklad List

  data List a = Nil | Cons a (List a)

  instance Functor List where

  $\quad fmap\ f\ Nil = Nil$

  $\quad fmap\ f\ (Cons\ h\ t) = Cons\ (f\ h)\ (fmap\ f\ t))$

- Nakoniec príklad prirodzenej transformácie z $List\ a$ do $Maybe\ a$

  $safeHead :: [a] \to Maybe\ a$

  $safeHead\ [] = Nothing$

  $safeHead\ (x : xs) = Just\ x$