

# Seminár 2: Funktory a Prirodzené Transformácie

## Funktor $F : C \rightarrow D$

- Zobrazenie z kategórie  $C$  do kategórie  $D$ .
- Skladá sa z
  1. Objektového zobrazenia :  $O_C \rightarrow O_D$   
 $a \rightarrow Fa$
  2. Zobrazenia morfizmov :  $a, b \in O_C, C(a, b) \rightarrow D(Fa, Fb)$   
 $f \rightarrow Ff$
- Zachováva štruktúru :
  1.  $F(id_a) = id_{Fa}$
  2.  $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$

## Špeciálne funktory

Vlastnosti definované na základe oboch zobrazení.

- Injektívny - objektové zobrazenie je injektívne
- Surjektívny - objektové zobrazenie je surjektívne
- *Faithful* - každé zobrazenie morfizmov je injektívne
- *Full* - každé zobrazenie morfizmov je surjektívne
- Endofunktor - funktor do rovnakej kategórie, napr.  $F : C \rightarrow C$

Zároveň hovoríme, že ak morfizmus  $Ff$  alebo objekt  $Fa$  má nejakú vlastnosť implikuje, že morfizmus  $f$  alebo objekt  $a$  mal danú vlastnosť, tak funktor reflektuje (*Reflects*) danú vlastnosť. Môžeme zachovávať napríklad terminalitu / inicialitu objektov alebo epi / mono pre morfizmy.

**Veta** : *Faithful* funktor reflektuje epi/ mono pre morfizmy.

## Príklady funktorov

- Identický  $id_C : C \rightarrow C$

$$o \in O_C : id_c(o) = o$$

$$f \in Hom(a, b) : id_c(f) = f$$

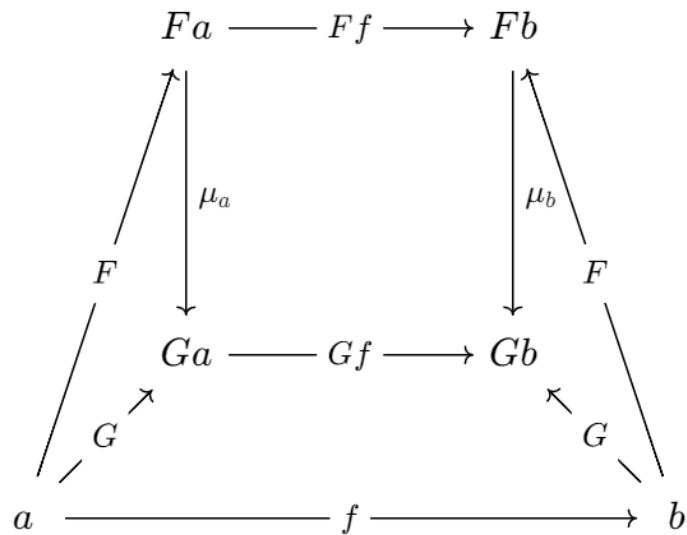
- Konštantný  $\Delta_d : C \rightarrow D, d \in D$

$$o \in O_C : \Delta_d(o) = d$$

$$f \in Hom(a, b) : \Delta_d(f) = id_d$$

## Prirodzené transformácie

- pre kategórie  $C, D$  a funktory  $F, G : C \rightarrow D$  definujeme prirodzenú transformáciu  $\mu = \{\mu_a \in D(Fa, Ga) | a \in O_C\}$
- $\mu_a$  sa nazýva komponenta prirodzenej transformácie  $\mu$  v  $a$
- Transformácia musí spĺňať *Naturality condition*, podmienku prirodzenosti,  $\mu_b \circ Ff = Gf \circ \mu_a$ , ktorú zadáva *Naturality square* :



- Prirodzená transformácia medzi  $G, F$  nemusí existovať, napríklad ak medzi  $Fa$  a  $Ga$  neexistuje žiaden morfizmus. Zároveň ich môže existovať viacero, keďže medzi  $Fa$  a  $Ga$  môže existovať viacero morfizmov.
- Vzhľadom na to, že prirodzené transformácie sú znova morfizmy môžeme zdefinovať kategóriu, v ktorej funktoři  $C \rightarrow D$  budú objekty a prirodzené transformácie budú morfizmy.

## Príklady z Haskellu

- Funktoři sa v Haskellu vyskytujú napríklad ako typové konštruktory, ktoré sú doplnené ešte o funkciu, transformujúcu morfizmy týchto typov. Takto sa dá zdefinovať napríklad `Maybe` :

```

Data Maybe a = Nothing | Just a
fmapMaybe :: (a -> b) -> (Maybe a -> Maybe b)
fmapMaybe f Nothing = Nothing
fmapMaybe f (Just x) = Just (f x)

```

- V Haskellu je tiež možné aj abstrahovať našu ideu funktoři za použitia typej triedy typových konštruktórov.

```

class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b

```

potom teda môžeme zdefinovať naše `Maybe` ako instanciu `Functoru`

```

instance Functor Maybe where
  fmap f Nothing = Nothing
  fmap f (Just x) = Just (f x)

```

alebo môžeme zdefinovať napríklad `List`

```

data List a = Nil | Cons a (List a)
instance Functor List where
  fmap f Nil = Nil
  fmap f (Cons h t) = Cons (f h) (fmap f t)

```

- Nakoniec príklad prirodzenej transformácie z `List a` do `Maybe a`

```

safeHead :: [a] -> Maybe a
safeHead [] = Nothing
safeHead (x : xs) = Just x

```