Yoneda

1 Recap

1.1 Natural transformation

Mějme funktory $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Přirozená transformace $\alpha : F \Rightarrow G$ je soubor morfismů:

$$\alpha = \{\alpha_a : F\ a \to G\ a \mid a \in \mathcal{C}\},$$

kde pro všechny morfismy $f : a \to b, f \in \mathcal{C}$ následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "Ff"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\ Fb \arrow[r, "\alpha_b"] & Gb \end{tikzcd}$$

Pokud všechny α_a jsou izo, pak F a G jsou přirozeně izomorfní. Pokud C je malá kategorie, pak $Nat(F, G)$ bude značit množinu všech přirozených transformací z F do G.

1.2 Hom-functor

Mějme malou kategorii $\mathcal{C}$. Pak pro každé dva objekty $a, b \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(a, b)$ je množina morfismů z a do b. Zafixujme si objekt $c \in \mathcal{C}$. Pak $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ budeme nazývat hom-funktor.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto, "\mathcal{C}(c,-)"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{C}(c, a) \arrow[d, "\mathcal{C}(c,f)"] \\ b \arrow[r, mapsto, "\mathcal{C}(c,-)"] & \mathcal{C}(c, b) \end{tikzcd}$$

Jak ale vypadá $\mathcal{C}(c, f)$, aby nám diagram výše komutoval?
$\mathcal{C}(c, f) : (g : c \to a) \mapsto (f \circ g : c \to b)$

2 Yoneda

Mějme $\mathcal{C}$ malou kategorii, $c \in \mathcal{C}$ a funktor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Yonedovo lemma tvrdí $Nat(\mathcal{C}(c, -), F) \cong Fc$, případně $\mathbf{Func}[\mathcal{C}, \mathbf{Set}](\mathcal{C}(c, -), F) \cong Fc$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(c, x) \arrow[r, "\mathcal{C}(c,f)"] \arrow[d, "\alpha_x"] & \mathcal{C}(c, y) \arrow[d, "\alpha_y"] \\ Fx \arrow[r, "Ff"] & Fy \end{tikzcd}$$

Spoiler je na další stránce! Hned navrchu!

$$\alpha_x(f) = (F\ f)\ (\alpha_c\ id_c)$$

$$F\ c = \{\alpha_c\ id_c \mid \alpha : \mathcal{C}(c, -) \Rightarrow F\}$$

3 Yoneda in Haskell

”homfunktor” `Reader a x = a → x`
”transformace” `alpha :: forall x. (a → x) → F x`
”yoneda” `forall x. (a → x) → F x ≅ F a`
”co-yoneda” `forall x. (x → a) → F x ≅ F a`

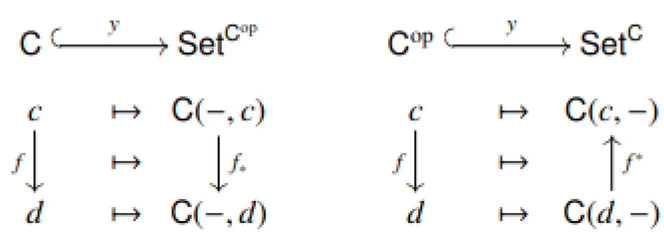
4 Yoneda embedding

Yonedovo vložení:

- $Y_\star : \mathcal{C} \to \mathbf{Func}[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$
- $a \mapsto \mathcal{C}(-, a)$
- $(f : a \to b) \mapsto (\{\alpha_c \mid c \in \mathcal{C}\} : \mathbf{Func}[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}](\mathcal{C}(-, a), \mathcal{C}(-, b)))$
- $\alpha_c(g) = f \circ g\ (g : c \to a)$

Hezčí yonedovo vložení:

- $Y^\star : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Func}[\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$
- $a \mapsto \mathcal{C}(a, -)$
- $(f : a \to b) \mapsto (\{\alpha_c \mid c \in \mathcal{C}\} : \mathbf{Func}[\mathcal{C}, \mathbf{Set}](\mathcal{C}(b, -), \mathcal{C}(a, -)))$
- $\alpha_c(g) = g \circ f\ (g : b \to c)$



5 YEiH

Druhé yonedovo vložení: `forall x.(a -> x) -> (b -> x)` $\cong$ `b -> a`.
`BtoA::B->A`, `fromY::(A -> x) -> (B -> x)`
`fromY f b = f (BtoA b)`.
`BtoA b = fromY id b`