Seminář 5: Kartézské uzavřené kategorie a λ-kalkul

Exponenciál (function object)

Nechť $\mathcal{C}$ je kategorie a $a, b \in \mathcal{C}$. *Exponenciál* $[a \Rightarrow b]$ (alternativní značení: b^a) je objekt takový, že:

- existuje morfismus $eval : ([a \Rightarrow b] \times a) \to b$
- pro každý další objekt z s morfismem $g : z \times a \to b$ existuje unikátní morfismus $h : z \to (a \to b)$, který faktorizuje g skrz $eval$, tedy $g = eval \circ (h \times id)$

$$\begin{tikzcd}
 & {[a \Rightarrow b] \times a} \arrow[dr, "eval_b^a"] & \\
z \times a \arrow[ur, "h \times id_a"] \arrow[rr, "g"] & & b
\end{tikzcd}$$

Kartézská uzavřená kategorie

Kategorie $\mathcal{C}$ se nazývá *kartézská uzavřená* (CCC), pokud splňuje následující podmínky:

- obsahuje terminální objekt
- pro každou dvojici objektů $a, b \in \mathcal{C}$ obsahuje jejich produkt $a \times b$
- pro každou dvojici objektů $a, b \in \mathcal{C}$ obsahuje jejich exponenciál $[a \Rightarrow b]$

Příklady CCC:

- **Set** - exponenciál $[a \Rightarrow b]$ je množina funkcí mezi a a b.
- **Booleova algebra** - morfismy jsou $\leq$, terminální objekt je 1, produkt $a \times b$ je infimum $a \wedge b$, exponenciál $[a \Rightarrow b]$ je „implikace“ $\neg a \vee b$

Bikartézská uzavřená kategorie

Kategorie $\mathcal{C}$ se nazývá *bikartézská uzavřená* (BCCC), pokud je kartézská uzavřená a navíc splňuje následující podmínky:

- obsahuje iniciální objekt
- pro každou dvojici objektů $a, b \in \mathcal{C}$ obsahuje jejich koprodukt $a + b$

(Typovaný) λ-kalkul

Korektní **výrazy** λ-kalkulu:

- každá proměnná x
- pokud t je výraz a x je proměnná, potom $\lambda x.t$ je výraz (abstrakce)
- pokud t a s jsou výrazy, pak i ts je výraz (aplikace)

Proměnná je ve výrazu **volná** v těchto případech:

- proměnná x je volná ve výrazu x
- proměnná x je volná v $\lambda y.t$, pokud $x \neq y$ a x je volná v t
- proměnná x je volná v st, pokud je volná v s nebo t

Proměnná je ve výrazu **vázaná** v těchto případech:

- proměnná x je vázaná v $\lambda y.t$, pokud $x = y$ nebo x je vázaná v t
- proměnná x je vázaná v st, pokud je vázaná v s nebo t

Na názvech proměnných nezáleží, tedy $\lambda x.x \equiv \lambda y.y$. Takovému přejmenování se říká **$\boldsymbol{\alpha}$-konverze** a využívá se pro předcházení jmenným konfliktů.

Nahrazení vázané proměnné argumentem se nazývá **$\boldsymbol{\beta}$-redukce** a dá se chápat jako výpočetní krok. Např. $(\lambda x.ax)y \equiv ay$

Pokud f neobsahuje x jako volnou proměnnou, platí $\lambda x.fx \equiv f$. Tomuto se říká **$\boldsymbol{\eta}$-redukce**

Typovaný $\boldsymbol{\lambda}$-kalkul je rozšíření λ-kalkulu, ve kterém má každý výraz svůj typ. Zaveďme si množiny typových symbolů $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, ...\}$, potom definujeme **typ** takto:

- Symbol S_i je typ.
- Pokud T_1 a T_2 jsou typy, pak i $T_1 \to T_2$ je typ.

Pokud je t výraz, potom pro označení, že jeho typ je T píšeme $t : T$.

- $c : T$ označuje konstantu typu T
- pro každý typ T existuje spočetně mnoho proměnných $x_1 : T, x_2 : T, ...$
- Pokud $t : T_1 \to T_2$ a $s : T_1$ potom $ts : T_2$
- Pro proměnnou $x : T_1$ a výraz $t : T_2$ platí $\lambda x.t : T_1 \to T_2$
- Existuje singleton typ 1 s výrazem $* : 1$. Libovolný další výraz tohoto typu je ekvivalentní s $*$.

Daný **typovaný $\boldsymbol{\lambda}$-kalkul $\boldsymbol{\mathcal{L}}$** můžeme chápat **jako kategorii $\boldsymbol{\mathcal{C}(\mathcal{L})}$**, kde:

- Objekty jsou typy T
- morfismy $A \to B$ jsou třídy ekvivalentních uzavřených výrazů $[c] : A \to B$
- identity jsou $id_T = \lambda x.x$ (kde x je typu T)
- skládání: $c \circ b = \lambda x.c(bx)$