Seminář 6: Adjunkce

Unit/counit adjunkce

Kategorie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, Funktory $L : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

- L je levý adjunkt R
- R je pravý adjunkt L

Značení: $L \dashv R$
Pokud existují přirozené transformace:

- $\eta : I_{\mathcal{D}} \Rightarrow R \circ L$(unit)
- $\epsilon : L \circ R \Rightarrow I_{\mathcal{C}}$(counit).

$$
\begin{tikzcd}
Ld \arrow[dr, mapsto, "R"'] & d \arrow[l, mapsto, "L"'] \arrow[d, "\eta_d"] \arrow[loop above, "I_{\mathcal{D}}"] \\
& RLd
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, mapsto, "R"] \arrow[loop above, "I_{\mathcal{C}}"] & Rc \arrow[dl, mapsto, "L"] \\
LRc \arrow[u, "\epsilon_d"] &
\end{tikzcd}
$$

Pro tyto transformace platí následující rovnosti:

- $L = L \circ I_{\mathcal{D}} \to L \circ R \circ L \to I_{\mathcal{C}} \circ L = L$
- $R = I_{\mathcal{D}} \circ R \to R \circ L \circ R \to R \circ I_{\mathcal{C}} = R$

Hom-Set adjunkce

Kategorie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, Funktory $L : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$
$L \dashv R \iff Hom_{\mathcal{C}}(Ld, c) \cong Hom_{\mathcal{D}}(d, Rc)$
Φ je přirozený isomorfismus mezi HomSety

$$
\begin{tikzcd}
Ld \arrow[d, bend right] \arrow[d] \arrow[d, bend left] & & d \arrow[ll, mapsto, "L"'] \arrow[d, bend right] \arrow[d] \arrow[d, bend left] \\
{} \arrow[rr, shift right] & & {} \arrow[ll, shift right, "\Phi"'] \\
c \arrow[rr, mapsto, "R"'] & & Rc
\end{tikzcd}
$$

Adjunkce unvierzální šipkou (Universal arrow adjunction)

Kategorie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, Funktory $L : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$
$L \dashv R \iff$ existuje přirozená transformace $\eta : I_{\mathcal{D}} \Rightarrow R \circ L$ taková, že $\forall c \in O_{\mathcal{C}}, \forall d \in O_{\mathcal{D}}$ a $\forall f : d \to Rc$ $\exists! g : Ld \to c$, že následující diagram komutuje:

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\eta_d"] \arrow[dr, "f"'] & RLd \arrow[d, "Rg"] \\
& Rc
\end{tikzcd}
$$

Ekvivalence definic

HomSet $\rightarrow$ Unit/Counit:
$\eta_d : I_{\mathcal{D}} \Rightarrow R \circ Ld = \Phi_{d,Ld}(I_{\mathcal{D}}(Ld))$
$\epsilon_c : L \circ R \Rightarrow I_{\mathcal{C}} = \Phi^{-1}_{Rc,c}(I_{\mathcal{C}}(Rc))$

Universal arrow $\rightarrow$ HomSet:
$\Phi_{d,c} : Hom_{\mathcal{C}}(Ld, c) \rightarrow Hom_{\mathcal{D}}(d, Rc) = (\alpha : Ld \rightarrow c) \mapsto R\alpha \circ \eta$

Unit/Counit $\rightarrow$ Universal arrow:
$R(\Delta) \circ \eta_c = f$
$\Delta = \epsilon_c \circ Lf = g$

Unikátnost adjunkcí (až na přirozený isomorfismus)

Nechť $L, L' : D \rightarrow c$ a $R : C \rightarrow D$
$L \dashv R, L' \dashv R$ s přirozenými bijekcemi $\Phi_{d,c}$ a $\Phi'_{d,c}$
Pak pro libovolné $d \in O_{\mathcal{D}}$ platí, že:
$Hom_{\mathcal{C}}(Ld, -) \cong Hom_{\mathcal{D}}(c, R-) \cong Hom_{\mathcal{C}}(L'd, -)$
Z toho jde pomocí Yonneda embedding ukázat, že F a F' jsou přirozeně isomorfní.

Příklady

Exponenciál CCC popsaný adjunkcí:

$L = z \rightarrow z \times a$
$R = b \rightarrow a \Rightarrow b$
Unit: $\eta = z \rightarrow a \Rightarrow z \times a$
Counit: $\epsilon = (a \Rightarrow b) \times a) \rightarrow b = eval$

Free/Forgetful adjunkce

Kategorie Mon - objekty jsou monoidy, morfismy jsou homomorfismy mezi nimi.
Mějme $X \in O_{Set}$ jako abecedu a $F(X)$ takové, že $F(X) = (X*, ++, ())$.
X^* je množina slov složených z prvků X - například:
$w = (x1, x2, x3)$, $u = (x1)$, $z = ()$.
$++$ je operace zřetězení a () je prázdné slovo.
Pak máme, že $F = Set \mapsto Mon$ takové, že pro každou množinu vybere monoid jí generovaný.
Mějme $U = Mon \mapsto Set$ takové, které monoid namapuje na jeho množinu.
X je tedy generátor monoidu $F(X)$ a $U(F(X))$ namapuje X na množinu generovanou X a operací $++$.
Nyní můžeme definovat přirozenou transformaci $\eta : Id_{Set} \Rightarrow U \circ F$ takovou, že $\eta_X(x) = (x)$. Nyní chceme ukázat, že pro libovolné f existuje právě jedno g takové, že následující daigram komutuje:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & U(F(X)) \arrow[d, "U(g)"] \\
& U(M)
\end{tikzcd}
$$

Tedy chceme najít morfismus g takový, že je homomorfismus mezi monoidy a zároveň splňuje rovnost: $f(x) = U(g)(\eta_X x) = U(g)((x))$.
Takový morfismus g je:
$g(()) = id_M$
$g((x)) = f(x)$
$g((x1, x2, \ldots, x_n)) = f(x1)f(x2)\ldots f(x_n)$