

## Seminář 6: Adjunkce

### Unit/counit adjunkce

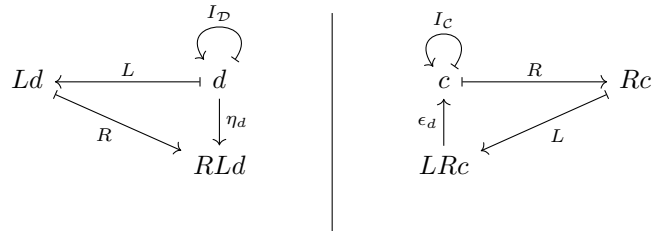
Kategorie  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ , Funktory  $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

- $L$  je levý adjunkt  $R$
- $R$  je pravý adjunkt  $L$

Značení:  $L \dashv R$

Pokud existují přirozené transformace:

- $\eta : I_{\mathcal{D}} \Rightarrow R \circ L$  (unit)
- $\epsilon : L \circ R \Rightarrow I_{\mathcal{C}}$  (counit).



Pro tyto transformace platí následující rovnosti:

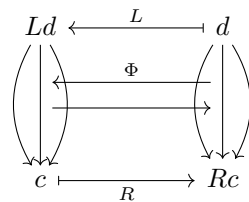
- $L = L \circ I_{\mathcal{D}} \rightarrow L \circ R \circ L \rightarrow I_{\mathcal{C}} \circ L = L$
- $R = I_{\mathcal{D}} \circ R \rightarrow R \circ L \circ R \rightarrow R \circ I_{\mathcal{C}} = R$

### Hom-Set adjunkce

Kategorie  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ , Funktory  $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

$L \dashv R \iff \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Ld, c) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(d, Rc)$

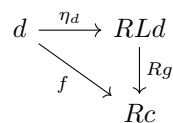
$\Phi$  je přirozený isomorfismus mezi HomSety



### Adjunkce unvierzální šipkou (Universal arrow adjunction)

Kategorie  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ , Funktory  $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

$L \dashv R \iff$  existuje přirozená transformace  $\eta : I_{\mathcal{D}} \Rightarrow R \circ L$  taková, že  $\forall c \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \forall d \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}} \text{ a } \forall f : d \rightarrow Rc \exists ! g : Ld \rightarrow c$ , že následující diagram komutuje:



## Ekvivalence definic

HomSet  $\rightarrow$  Unit/Counit:

$$\eta_d : I_{\mathcal{D}} \Rightarrow R \circ Ld = \Phi_{d,Ld}(I_{\mathcal{D}}(Ld))$$

$$\epsilon_c : L \circ R \Rightarrow I_{\mathcal{C}} = \Phi_{Rc,c}^{-1}(I_{\mathcal{C}}(Rc))$$

Universal arrow  $\rightarrow$  HomSet:

$$\Phi_{d,c} : Hom_{\mathcal{C}}(Ld, c) \rightarrow Hom_{\mathcal{D}}(d, Rc) = (\alpha : Ld \rightarrow c) \mapsto R\alpha \circ \eta$$

Unit/Counit  $\rightarrow$  Universal arrow:

$$R(\Delta) \circ \eta_c = f$$

$$\Delta = \epsilon_c \circ Lf = g$$

## Unikátnost adjunkcí (až na přirozený isomorfismus)

Nechť  $L, L' : D \rightarrow C$  a  $R : C \rightarrow D$

$L \dashv R, L' \dashv R$  s přirozenými bijekcemi  $\Phi_{d,c}$  a  $\Phi'_{d,c}$

Pak pro libovolné  $d \in O_{\mathcal{D}}$  platí, že:

$$Hom_{\mathcal{C}}(Ld, -) \cong Hom_{\mathcal{D}}(c, R-) \cong Hom_{\mathcal{C}}(L'd, -)$$

Z toho jde pomocí Yoneda embedding ukázat, že  $F$  a  $F'$  jsou přirozeně isomorfni.

## Příklady

### Exponenciál CCC popsáný adjunkcí:

$$L = z \rightarrow z \times a$$

$$R = b \rightarrow a \Rightarrow b$$

$$\text{Unit: } \eta = z \rightarrow a \Rightarrow z \times a$$

$$\text{Counit: } \epsilon = (a \Rightarrow b) \times a \rightarrow b = eval$$

### Free/Forgetful adjunkce

Kategorie *Mon* - objekty jsou monoidy, morfismy jsou homomorfismy mezi nimi.

Mějme  $X \in O_{Set}$  jako abecedu a  $F(X)$  takové, že  $F(X) = (X^*, ++, ())$ .

$X^*$  je množina slov složených z prvků  $X$  - například:

$$w = (x1, x2, x3), u = (x1), z = ().$$

$++$  je operace zřetězení a  $()$  je prázdné slovo.

Pak máme, že  $F = Set \mapsto Mon$  takové, že pro každou množinu vybere monoid jí generovaný.

Mějme  $U = Mon \mapsto Set$  takové, které monoid namapuje na jeho množinu.

$X$  je tedy generátor monoidu  $F(X)$  a  $U(F(X))$  namapuje  $X$  na množinu generovanou  $X$  a operací  $++$ .

Nyní můžeme definovat přirozenou transformaci  $\eta : Id_{Set} \Rightarrow U \circ F$  takovou, že  $\eta_X(x) = (x)$ . Nyní chceme ukázat, že pro libovolné  $f$  existuje právě jedno  $g$  takové, že následující diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & U(F(X)) \\ & \searrow f & \downarrow U(g) \\ & & U(M) \end{array}$$

Tedy chceme najít morfismus  $g$  takový, že je homomorfismus mezi monoidy a zároveň splňuje rovnost:  $f(x) = U(g)(\eta_X x) = U(g)((x))$ .

Takový morfismus  $g$  je:

$$g(()) = id_M$$

$$g((x)) = f(x)$$

$$g((x1, x2, \dots, x_n)) = f(x1)f(x2)\dots f(x_n)$$