Algebra II – jaro 2022 – 2. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N}, *)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem

$$a * b = \begin{cases} a-2, & \text{pokud } 2 \mid a-b \text{ a } a \geq 3, \\ a-3, & \text{pokud } 2 \nmid a-b \text{ a } a \geq 4, \\ b, & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Uvažujme množinu L, jejímiž prvky jsou právě množiny racionálních čísel $A \subseteq \mathbb{Q}$, které splňují podmínku

$$\forall q \in \mathbb{Q}\colon \quad q \in A \iff (\exists\, r, s \in A\colon q = r + s).$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$ je svaz.

3. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$, nejmenší prvek $\bot$ a všechny posloupnosti celých čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ takové, že pro všechna $i \in \mathbb{N}$ existuje $j > i$ splňující $a_i \geq a_j$, přičemž $(a_i)_{i=1}^{\infty} \leq (b_i)_{i=1}^{\infty}$ platí právě tehdy, když pro všechna $i \in \mathbb{N}$ je splněno $a_i \leq b_i$. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda množina všech množin reálných čísel, které nemají nejmenší prvek, tvoří vzhledem k uspořádání obrácenou inkluzí $\supseteq$ algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Uvažujme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$. Pro libovolné slovo $w \in \Sigma^*$ značí $\mathrm{alph}(w)$ množinu všech písmen, která se v něm vyskytují. Zaveďme dvě označení:

$$\mathrm{PSalph}(w) = \{\, (\mathrm{alph}(u), \mathrm{alph}(v)) \mid w = uv,\ u, v \in \Sigma^* \,\}$$
$$\mathrm{Falph}(w) = \{\, \mathrm{alph}(u) \mid w = tuv,\ t, u, v \in \Sigma^* \,\}$$

Pro každý z následujících předpisů rozhodněte, zda definuje kongruenci volného monoidu $(\Sigma^*, \cdot)$:

$$w \sim w' \iff \mathrm{PSalph}(w) = \mathrm{PSalph}(w')$$
$$w \approx w' \iff \mathrm{Falph}(w) = \mathrm{Falph}(w')$$

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z unárních operačních symbolů f a g a binárního operačního symbolu $\bullet$. Pro každou z následujících identit rozhodněte, zda je splněna v algebře

$$\mathcal{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, \bullet^{\mathcal{A}}),$$

jejíž operace jsou pro libovolné relace ρ a σ definovány předpisy $f^{\mathcal{A}}(\rho) = \rho^{-1}$, $g^{\mathcal{A}}(\rho) = \{\, (a, b) \in \rho \mid \forall c \in \mathbb{N}\colon (a, c) \in \rho \implies c \geq b \,\}$ a $\rho \bullet^{\mathcal{A}} \sigma = \rho \circ \sigma$ (ρ po σ).

a) $f(g(f(g(x)))) = g(f(g(f(x))))$
b) $g(g(x) \bullet x) = g(x \bullet x)$

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů $(L, \vee, \wedge)$ takových, že každý jejich prvek, který není srovnatelný se všemi prvky, je nesrovnatelný s nekonečně mnoha.