Algebra II – jaro 2017 – 2. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{Z}, *, \kappa)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem $a * b = a + 2b$ a κ je unární operace definovaná předpisem $\kappa(a) = a + 2$.

2. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou třídy izomorfismu konečných svazů, přičemž třída svazu K je menší nebo rovna třídě svazu L právě tehdy, když K je homomorfním obrazem svazu L. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je svaz.

3. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(\{\, \rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \rho \circ \rho = \rho \,\}, \subseteq)$ je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda množina všech relací ekvivalence na $\mathbb{N}$, jejichž každá třída má nekonečně mnoho prvků nebo jediný prvek, uspořádaná inkluzí, je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda předpis

$$\varphi \sim \psi \quad \iff \quad \forall r \in \mathbb{R}^*\colon \inf \varphi^{-1}(r) = \inf \psi^{-1}(r),$$

   kde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, definuje kongruenci $\sim$ algebry $((\mathbb{R}^*)^{\mathbb{R}^*}, \kappa, \lambda)$, kde κ a λ jsou unární operace definované pro $\varphi\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ a $r \in \mathbb{R}^*$ předpisy $\kappa(\varphi)(r) = \varphi(r^2)$ a $\lambda(\varphi)(r) = \varphi(r^3)$.

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z binárních operačních symbolů f a g. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$ s nosnou množinou $\mathcal{P}(\{a, b\}^*)$ a s operacemi definovanými pro libovolné jazyky $K, L \subseteq \{a, b\}^*$ předpisy

$$f^{\mathcal{A}}(K, L) = \{\, u \in \{a, b\}^* \mid \exists v, w \in \{a, b\}^*\colon uv \in K,\ uw \in L \,\}$$

   a $g^{\mathcal{A}}(K, L) = K \cdot L$.
   a) $f(g(x, x), g(x, y)) = g(x, f(x, y))$
   b) $f(g(x, f(y, y)), z) = f(g(x, y), z)$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech monounárních algeber $\mathcal{A}$, které mají buď nejvýše jeden prvek, nebo na nich existuje kongruence $\sim$ různá od diagonály taková, že $\mathcal{A}/{\sim} \cong \mathcal{A}$.