Algebra II – jaro 2017 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{Z}, *)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem
$$a * b = \begin{cases} a-1 & \text{pokud } a \cdot b < 0, \\ a+1 & \text{pokud } a \cdot b > 0, \\ a & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina
$$(\{\, L \subseteq \{a,b\}^+ \mid \forall u, v \in L \colon uv \in L \text{ nebo } vu \in L \,\}, \subseteq)$$
je svaz.

3. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina
$$(\{\, L \subseteq \{a,b\}^+ \mid \forall u, v \in \{a,b\}^+ \colon uv \in L \implies (u \in L \text{ nebo } v \in L) \,\}, \subseteq)$$
je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina
$$(\{\, \rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \rho = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ nebo } \rho \text{ je relace uspořádání na } \mathbb{N} \,\}, \subseteq)$$
je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda předpis
$$M \sim N \qquad \iff \qquad \sup M = \sup N$$
(kde supremum může nabývat libovolné hodnoty z $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) definuje kongruenci $\sim$ algebry $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \cup, \cap, +)$, kde $M + N = \{\, r + s \mid r \in M,\ s \in N \,\}$.

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z binárních operačních symbolů f a g. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$ s nosnou množinou $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ a s operacemi definovanými pro libovolné relace $\rho, \sigma \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ předpisy $f^{\mathcal{A}}(\rho, \sigma) = \rho \circ \sigma^{-1}$ a $g^{\mathcal{A}}(\rho, \sigma) = \rho \cap \sigma$.
a) $g(f(f(x,x), f(x,x)), f(x,x)) = f(x,x)$,
b) $g(f(x, f(x, f(x,x))), f(x,x)) = f(x,x)$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů, jejichž jedinými kongruencemi jsou diagonála a univerzální relace.