Algebra II – jaro 2018 – 1. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N}, *)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem

$$a * b = \begin{cases} a+1, & \text{pokud } a \text{ je sudé a } b \text{ liché}, \\ a+2, & \text{pokud } a \text{ i } b \text{ jsou sudá}, \\ a+3, & \text{pokud } a \text{ je liché}. \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Na množině L všech dvouprvkových podmnožin množiny $\mathbb{N}$ je definováno uspořádání předpisem

$$\{a, b\} \leq \{c, d\} \quad \iff \quad (a + b \leq c + d \ \& \ a \cdot b \leq c \cdot d).$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \leq)$ je svaz.

3. **(5 bodů)** Uvažujme množinu L, jejímiž prvky jsou množina $\mathbb{R}$ a všechna sjednocení konečně mnoha otevřených intervalů, tj. množiny tvaru $(a_1, b_1) \cup \dots \cup (a_n, b_n)$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$ je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou nejmenší prvek $\perp$ a všechny dvojice (M, m), kde $m \in M \subseteq \mathbb{N}$, na nichž je uspořádání dáno předpisem

$$(M, m) \leq (N, n) \quad \iff \quad M \subseteq N \ \& \ m \geq n.$$

Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Nechť $\mathcal{A}$ značí algebru $(\mathbb{N}, +, \mathrm{succ}, p)$, kde $p(n) = n^2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda předpis

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \iff \quad \exists \text{ bijekce } h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ splňující } \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n = b_{h(n)},$$

pro $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, definuje kongruenci $\sim$ algebry $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z unárního operačního symbolu f a binárního operačního symbolu $\bullet$. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$ s nosnou množinou $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a s operacemi definovanými pro libovolná $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ předpisy

$$f^{\mathcal{A}}((a, b)) = (-a, (-1)^{a+1} \cdot b),$$
$$(a, b) \bullet^{\mathcal{A}} (c, d) = (a + c, (-1)^c \cdot b + d).$$

a) $f(x \bullet y) = f(x) \bullet f(y)$,
b) $\big((x \bullet (y \bullet y)) \bullet f(x)\big) \bullet (z \bullet z) = (z \bullet z) \bullet \big((x \bullet (y \bullet y)) \bullet f(x)\big)$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech algeber (A, f, g), kde f a g jsou unární operace splňující $\ker(f) = \ker(g)$.