Algebra II – jaro 2019 – 2. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(A, \cup, \setminus, m, f)$, kde množina A sestává právě z množin přirozených čísel $B \subseteq \mathbb{N}$ takových, že jedna z množin B a $\mathbb{N} \setminus B$ je konečná, unární operace m zobrazuje každou neprázdnou množinu $B \subseteq \mathbb{N}$ na jednoprvkovou množinu obsahující pouze nejmenší prvek množiny B, $m(\emptyset) = \emptyset$ a f je unární operace definovaná předpisem

$$f(B) = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists\, k, \ell \in B \colon k \le n \le \ell \,\}.$$

2. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$, nejmenší prvek $\perp$ a všechny dvojice (A, a), kde $a \in A \subseteq \mathbb{N}$, přičemž $(A, a) \le (B, b)$ platí právě tehdy, když $A \subseteq B$ a $a \le b$. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je svaz.

3. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$, nejmenší prvek $\perp$ a všechny posloupnosti reálných čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, které splňují pro všechna $i \in \mathbb{N}$ podmínku

$$(\forall j > i \colon a_i \le a_j) \;\&\; (\exists j > i \colon a_i < a_j),$$

přičemž $(a_i)_{i=1}^{\infty} \le (b_i)_{i=1}^{\infty}$ platí právě tehdy, když pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí $a_i \le b_i$. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Na množině

$$L = \{\, (A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \cap B = \emptyset \text{ nebo } A = \mathbb{N} \,\}$$

je definováno uspořádání předpisem

$$(A, B) \le (C, D) \quad \iff \quad A \subseteq C \;\&\; B \subseteq D.$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \le)$ je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Nechť A je množina všech konečných slov nad nekonečnou abecedou $\{a_1, a_2, \dots\}$, která obsahují alespoň dvě různá písmena. Na A uvažujme binární operaci zřetězení $\cdot$ a unární operaci f, která každé slovo zobrazí na jeho podslovo složené z prvních výskytů písmen. Pro každé slovo $w \in A$ definujme $P(w)$ jako množinu všech podslov slova w délky 2 složených z různých písmen, tj. množina $P(w)$ obsahuje právě slova ab taková, že $a \ne b$ a existují slova s, t, u splňující $satbu = w$. Rozhodněte, zda relace $\sim$ definovaná předpisem

$$v \sim w \quad \iff \quad P(v) = P(w)$$

je kongruencí algebry a) $(A, \cdot)$, b) (A, f).

6. (10 bodů) Uvažujme typ algeber sestávající z nulárního operačního symbolu 0 a tří binárních operačních symbolů $\bullet$, $*$ a $\oplus$. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$, jejíž nosnou množinou je $\mathcal{P}(\{a,b\}^* \times \{a,b\}^*)$, tj. množina všech binárních relací na množině všech slov nad dvoupísmennou abecedou $\{a,b\}$, konstanta $0^{\mathcal{A}}$ je definována jako identita, operace $\bullet^{\mathcal{A}}$ je kompozice, operace $*^{\mathcal{A}}$ je průnik a operace $\oplus^{\mathcal{A}}$ je definována jako zřetězení po složkách, tj.

$$\rho \oplus^{\mathcal{A}} \sigma = \{\, (uu', vv') \mid (u,v) \in \rho,\ (u',v') \in \sigma) \,\}.$$

a) $(x \oplus y) \bullet (x \oplus y) = (x \bullet x) \oplus (y \bullet y)$,
b) $(x \oplus 0) * 0 = (x * 0) \oplus 0$.

7. (15 bodů) Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů, které buď nemají žádný prvek, nebo obsahují největší a nejmenší prvek a každý jejich prvek má nejvýše jeden komplement.