

MB141 – 7. přednáška

Afinní geometrie

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2022

- Afinní podprostory v \mathbb{R}^n
- Parametrický a implicitní popis
- Hodnost matice a soustavy lineárních rovnic
- Průnik a součet afinních podprostorů
- Vzájemná poloha afinních podprostorů
- Standardní úlohy

Geometrie ve vícerozměrném prostoru

Pokud bereme \mathbb{R}^3 jako vektorový prostor, tak všechny jeho vektorové podprostory jsou

- $\{0\}$ množina obsahující pouze nulový vektor (počátek),
- přímky procházející počátkem,
- roviny procházející počátkem,
- celé \mathbb{R}^3 .

Chceme-li se ale zabývat geometrií v prostoru, potřebujeme pracovat se všemi přímkami a všemi rovinami. Proto zavádíme pojem afinního prostoru a jeho afinních podprostorů. Prvky \mathbb{R}^3 (obecně \mathbb{R}^n) bereme jednak jako body, jednak jako vektory, tj. uvažujeme množinu bodů \mathcal{B} a vektorový prostor V a přitom máme operaci „přičtení vektoru k bodu“:

$+$: $\mathcal{B} \times V \rightarrow \mathcal{B}$, $(B, v) \mapsto B + v$ a s ní sdruženou operaci „rozdíl bodů“: $-$: $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow V$, $(A, B) \mapsto B - A = \overrightarrow{AB}$.

Definice

Bud' $V = \mathbb{R}^n$ vektorový prostor. **Standardní afinní prostor** $\mathcal{A}_n = \mathbb{R}^n$ je množina všech **bodů** v \mathbb{R}^n spolu s operací, která bodu $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathcal{A}_n$ a vektoru $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ přiřadí bod $A + v = [a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n] \in \mathcal{A}_n$.

Tato operace splňuje následující tři vlastnosti:

- 1 $A + 0 = A$ pro všechny body $A \in \mathcal{A}_n$ a nulový vektor $0 \in V$,
- 2 $A + (v + w) = (A + v) + w$ pro všechny vektory $v, w \in V$, a body $A \in \mathcal{A}_n$,
- 3 pro každé dva body $A, B \in \mathcal{A}_n$ existuje právě jeden vektor $v \in V$ takový, že $A + v = B$. Značíme jej $B - A$, nebo \overrightarrow{AB} .

Vektorový prostor V nazýváme **zaměření afinního prostoru** \mathcal{A}_n . Abychom předešli nejasnostem, tak oddělíme formálně množinu \mathcal{A}_n a V tak, že body z \mathcal{A}_n píšeme do hranatých závorek: $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathcal{A}_n$.

Afinní souřadná soustava

Pokud zafixujeme jeden pevný bod $A_0 \in \mathcal{A}_n$ a pevnou bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ ve V , tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}_n$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic** $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ zadané počátkem afinní souřadné soustavy A_0 a bazí zaměření α .

Afinní souřadnice bodu $A = A_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ v soustavě $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ jsou $[x_1, \dots, x_n]$.

Obvykle bereme $A_0 = [0, \dots, 0]$ a standardní bázi $\alpha = \varepsilon_n$.
Potom jsou afinní souřadnice bodu $A = [a_1, \dots, a_n]$ stejná n -tice $[a_1, \dots, a_n]$.

Definice

Neprázdná podmnožina \mathcal{M} afinního prostoru \mathcal{A}_n se zaměřením V se nazývá **afinní podprostor** v \mathcal{A}_n , jestliže existuje vektorový podprostor $W \subseteq V$ takový, že pro některý bod $A \in \mathcal{M}$ je podmnožina

$$\mathcal{M} = \{A + v \in \mathcal{A}_n \mid v \in W\}.$$

Zapisujeme $\mathcal{M} = A + W$.

- Vektorový podprostor W se nazývá **zaměření** afinního podprostoru \mathcal{M} . Značíme ho $Z(\mathcal{M})$ a píšeme $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$.
- **Dimenzí** afinního podprostoru rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Afinní kombinací bodů B a C z \mathcal{A}_n je bod

$$D = (1 - \lambda)B + \lambda C$$

definovaný jako součet bodu a vektoru takto $D = B + \lambda(C - B)$. Jsou-li body B a C různé, pak všechny jejich afinní kombinace vytvářejí přímku. Pomocí afinních kombinací můžeme afinní podprostory charakterizovat takto:

Věta

Neprázdňá podmnožina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_n$ je afinní podprostor, právě když s každými dvěma body obsahuje všechny jejich afinní kombinace. To geometricky znamená, že \mathcal{M} s každými dvěma body obsahuje i přímku, která jimi prochází.

Nechť $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$ je afinní podprostor v \mathcal{A}_n a (u_1, \dots, u_k) je báze $Z(\mathcal{M}) \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak vyjádření podprostoru

$$\mathcal{M} = \{A + t_1 u_1 + \dots + t_k u_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme **parametrický popis** podprostoru \mathcal{M} . Příklady:

- Příkladem na parametrický popis přímky v \mathcal{A}_3 je $p: X = [2, 3, -8] + t(4, 1, 5)$, v jednotlivých souřadnicích $x_1 = 2 + 4t$, $x_2 = 3 + t$, $x_3 = -8 + 5t$.
- Příkladem na parametrický popis roviny v \mathcal{A}_3 je $\sigma: X = [3, -1, 2] + r(4, 6, 1) + s(-1, 0, 3)$, v souřadnicích $x_1 = 3 + 4r - s$, $x_2 = -1 + 6r$, $x_3 = 2 + r + 3s$.

Implicitní (obecný) popis afinního podprostoru

Uvažujme soustavu 4 lineárních rovnic o 5 neznámých $Ax = b$.
Rozšířenou matici soustavy upravíme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Řešením je množina

$$\mathcal{M} = \{[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1) \in \mathbb{R}^5 \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

To je parametrický popis afinního podprostoru. Zaměření tohoto podprostoru je

$$Z(\mathcal{M}) = \{t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1) \in \mathbb{R}^5 \mid s, t \in \mathbb{R}\}, \text{ což je řešení homogenní soustavy } Ax = 0. \text{ Vidíme, že } \dim \mathcal{M} = 2.$$

Jestliže množina řešení soustavy $Ax = b$ je neprázdná, jde o afinní podprostor. Popis afinního podprostoru pomocí soustavy lineárních rovnic se nazývá **implicitní** nebo také **obecný popis**.

Hodnost matice a soustavy lineárních rovnic

Dimenze afinního podprostoru, který je množinou řešení soustavy lineárních rovnic, souvisí s hodnotí matice.

Definice

Nechť je A matice s k řádky a n sloupci, tj. každý sloupec je prvek \mathbb{R}^k a každý řádek je prvek \mathbb{R}^n . Následující tři celá čísla se rovnají

- 1) počet nenulových řádků po úpravě na schodovitý tvar,
- 2) maximální počet lineárně nezávislých řádků,
- 3) maximální počet lineárně nezávislých sloupců.

Jejich společnou hodnotu nazýváme **hodností matice A** a značíme $h(A)$.

- Soustava $A \cdot x = b$ má řešení právě tehdy, když hodnost matice A je rovna hodnosti rozšířené matice $(A | b)$, tj.

$$h(A) = h(A | b).$$

- Pokud má soustava $A \cdot x = b$ řešení $x \in \mathbb{R}^n$, pak množina všech řešení je afinní podprostor dimenze

$$n - h(A).$$

Zaměření tohoto afinního podprostoru je množina řešení homogenní soustavy $Ax = 0$.

Příklady:

- Matice A tvaru 4×5 v příkladu na straně 9 má hodnost 3 a ta je rovna hodnosti matice $(A \mid b)$. Dimenze příslušného afinního podprostoru je $5 - h(A) = 5 - 3 = 2$.
- Rovnice $3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 9$ je implicitním popisem roviny v \mathcal{A}_3 . Příslušná matice je $A = (3, 7, -2)$. Její hodnost je 1. Dimenze afinního podprostoru, který popisuje, je $3 - 1 = 2$, což odpovídá tomu, že dimenze roviny je 2.

- Soustava $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$ má matici $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, jejíž hodnost je 2. Dimenze příslušného afinního podprostoru je $3 - 2 = 1$, což odpovídá tomu, že jde o přímku v \mathcal{A}_3 .
- Rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ s aspoň jedním nenulovým koeficientem a_i popisuje afinní podprostor v \mathcal{A}_n dimenze $n - h(a_1, a_2, \dots, a_n) = n - 1$. Nazýváme jej nadrovinou v \mathbb{R}^n .

Přechod od implicitního (obecného) popisu afinního podprostoru soustavou $Ax = b$ k parametrickému popisu je jednoduchý, stačí soustavu vyřešit. Příklad jsme si již ukázali na straně 9.

Od parametrického vyjádření k implicitnímu

Přechod od parametrického popisu k implicitnímu (obecnému) je také vždy možný. Ze soustavy rovnic, kde vystupují souřadnice x_1, x_2, \dots, x_n a parametry t_1, t_2, \dots, t_k , $k < n$, vypočteme z k rovnic parametry t_i a ty dosadíme do zbývajících rovnic. Ukážeme si to na příkladu.

Příklad

Nalezněte nějakou soustavu lineárních rovnic, jejíž řešení je $\{[0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 1, 1) + s(2, 2, -1, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Parametrický popis v souřadnicích je

$$x_1 = -2t + 2s$$

$$x_2 = -1 + t + 2s$$

$$x_3 = 2 + t - s$$

$$x_4 = t + s$$

Od parametrického vyjádření k implicitnímu II

Z posledních dvou rovnic spočítáme

$$2t = x_3 + x_4 - 2$$

$$2s = x_4 - x_3 + 2$$

a dosadíme do prvních dvou rovnic. Druhou vynásobíme dvěma. Dostaneme

$$x_1 = -2x_3 + 4$$

$$2x_2 = -x_3 + 3x_4,$$

což dává soustavu $Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = b$.

Všimněte si, že řádky matice A jsou lineárně nezávislé a kolmé k vektorům zaměření, které se vyskytují v parametrickém popisu. Dále, když maticí A vynásobíme souřadnicemi bodu $[0, -1, 2, 0]^T$ dostaneme pravou stranu b . Toto platí obecně a můžeme to využít k nalezení nejdříve matice A a pak pravé strany b .

Průnik afinních podprostorů

Je-li průnik afinních podprostorů neprázdný, je opět afinním podprostorem. Metoda výpočtu průniku afinních podprostorů \mathcal{M} a \mathcal{N} závisí na vyjádření prostorů.

- Oba implicitně: ze 2 soustav vytvoříme jednu velkou soustavu.
- Jeden implicitně a druhý parametricky: dosadíme z parametrického vyjádření do soustavy.
- Oba parametricky: porovnáním parametrických vyjádření vznikne soustava pro parametry.

Ukážeme si řešení v druhém případě.

Příklad

V \mathcal{A}_3 najděte průnik roviny $\sigma : 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 1 = 0$ s rovinou $\rho : X = [1, 3, 11] + t(1, 0, 1) + s(0, 1, 2)$.

Příklad na průnik – dokončení

Parametrické vyjádření roviny ρ

$$x_1 = 1 + t, \quad x_2 = 3 + s, \quad x_3 = 11 + t + 2s$$

dosadíme do rovnice pro rovinu σ .

$$2(1 + t) + 3(3 + s) - (11 + t + 2s) + 1 = 0.$$

Po úpravě $t + s + 1 = 0$. Řešením jsou dvojice $(t, s) = (a, -1 - a)$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr. Body průniku jsou tedy ty body X z roviny σ , které napíšeme pomocí parametrů $t = a$ a $s = -1 - a$:

$$\begin{aligned} X &= [1, 3, 11] + a(1, 0, 1) - (a + 1)(0, 1, 2) \\ &= [1, 2, 9] + a(1, -1, -1). \end{aligned}$$

Tedy průnikem je přímka s parametrickým vyjádřením $[1, 2, 9] + a(1, -1, -1)$.

Afinní obal množiny a spojení afinních podprostorů

- Afinní podprostor $\langle M \rangle$ v \mathcal{A}_n generovaný neprázdnou množinou M je nejmenší afinní podprostor obsahující množinu M , je to průnik všech afinních podprostorů, které obsahují M .
- Hovoříme také o **afinním obalu** množiny bodů M v \mathcal{A}_n .
- Příklad: afinní obal dvou přímek $A + t \cdot u$ a $B + s \cdot v$ se směrovými vektory u, v je $A + [u, v, \overrightarrow{AB}]$.
- Pro dvojici afinních podprostorů \mathcal{M} a \mathcal{N} se afinnímu obalu množiny $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ říká **spojení** afinních podprostorů. Značíme $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$.
- Pro $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$, $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ pak platí $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} = A + Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}) + [\overrightarrow{AB}]$. Jeho zaměření je součet tří vektorových podprostorů $Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}) + [\overrightarrow{AB}]$.

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Mějme podprostory \mathcal{M} a \mathcal{N} . Pro jejich vzájemnou polohu jsou tyto možnosti:

- 1 Jsou si rovny, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}) = Z(\mathcal{N})$.
- 2 Jeden je podprostorem druhého, např. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$.
- 3 Podprostory jsou **rovnoběžné**, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a platí buď $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ nebo $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$.
- 4 Podprostory jsou **různoběžné**, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a neplatí ani $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ ani $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$.
- 5 Podprostory jsou **mimoběžné**, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ a neplatí ani $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ ani $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$.

Vzájemnou polohu umíme počítat, neboť všechny podmínky umíme prověřit – stačí určit $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ a $Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N})$.

Příklad

Zjistěte vzájemnou polohu rovin π a ρ v \mathcal{A}_4 .

$$\pi : X = [1, 1, 0, 2] + a(1, 0, 1, 1) + b(1, 0, 0, 1),$$

$$\rho : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \quad x_1 - x_2 - x_4 = 4.$$

Nejdříve zjistíme průnik $\pi \cap \rho$. Bod průniku $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ má parametrické vyjádření bodu roviny π

$$x_1 = 1 + a + b, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = a, \quad x_4 = 2 + a + b.$$

To dosadíme do rovnic pro ρ . Dostaneme

$a + 2b + 4 = 2, \quad -2 = 4$. Je vidět, že soustava nemá řešení, tedy průnik $\pi \cap \rho = \emptyset$.

Nyní najdeme průnik $Z(\pi) \cap Z(\rho)$.

$$Z(\pi) : u = a(1, 0, 1, 1) + b(1, 0, 0, 1),$$

$$Z(\rho) : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 - x_4 = 0.$$

Počítáme stejně jako v předchozím případě a pro parametry dostaneme rovnice $a + 2b = 0$, $0 = 0$. Řešením jsou dvojice $(a, b) = (2t, -t)$. Průnik zaměření je proto

$$\{2t(1, 0, 1, 1) - t(1, 0, 0, 1)\} = [(1, 9, 2, 1)].$$

Dimenze obou zaměření $Z(\pi)$ a $Z(\rho)$ jsou 2, dimenze průniku je 1, tedy nenastane $Z(\pi) \subseteq Z(\rho)$ ani $Z(\rho) \subseteq Z(\pi)$. (V tomto případě, kdy se dimenze rovnají, je každá s inkluzí ekvivalentní rovnosti $Z(\pi) = Z(\rho)$.)

Závěr: Roviny π a ρ jsou mimoběžné.

Příklad

Zjistěte, zda body $[0, 2, 1]$, $[-1, 2, 0]$, $[-2, 5, 2]$ a $[0, 5, 4]$ z \mathcal{A}_3 leží v jedné rovině.

- Libovolná dvojice zadaných bodů z afinního prostoru \mathcal{A}_3 určuje vektor. To, že čtyři body leží v rovině je ekvivalentní tomu, že jsou tři vektory, dané jedním vybraným bodem a vždy jedním ze tří zbylých, lineárně závislé.
- Vybereme např. bod $[0, 2, 1]$ (na výběru nezáleží), pak uvažujeme vektory $[-1, 2, 0] - [0, 2, 1] = (-1, 0, -1)$, $[-2, 5, 2] - [0, 2, 1] = (-2, 3, 1)$, $[0, 5, 4] - [0, 2, 1] = (0, 3, 3)$.
- Již známým výpočtem zjistíme, že vektory jsou lineárně závislé. Dané body leží tedy v rovině.

Standardní příklady na afinní podprostory II

Průnik a spojení afinních podprostorů je nástroj, který se často používá k řešení mnoha jiných příkladů.

Příklad

Najděte příčku dvou mimoběžných přímek

$$p : [1, 1, 1] + t(2, 1, 0), \quad q : [2, 2, 0] + t(1, 1, 1),$$

takovou, že přímka jí určená prochází bodem $C = [1, 0, 0]$.

Příčkou rozumíme úsečku, jejíž jeden krajní bod leží na jedné z přímek, druhý krajní bod na druhé.

Označme $A = [1, 1, 1]$. Jeden krajní bod příčky $Q \in q$ najdeme jako průnik přímky q s rovinou ρ , která je spojením přímky p a bodu C . Ta má rovnici

$$A + t(2, 1, 0) + s \cdot \overrightarrow{AC} = [1, 1, 1] + t(2, 1, 0) + s(0, 1, 1).$$

Průnikem je bod $Q = [5, 5, 3] \in q$. Rovnice přímky CQ je $C + a \cdot \overrightarrow{CQ} = [1, 0, 0] + a(4, 5, 3)$. Její průnik s přímkou p je bod $P = [7/3, 5/3, 1] \in p$, druhý krajní bod příčky.

- Přejchod od implicitního popisu k parametrickému a obráceně.
- Výpočet průniku dvou afinních podprostorů.
- Výpočet spojení dvou afinních podprostorů.
- Výpočet vzájemné polohy afinních podprostorů.
- Nalezení afinního podprostoru daných vlastností.

Příklad (7.1)

Najděte parametrický a obecný popis roviny v \mathbb{R}^4 , která prochází body $A = [1, 0, 1, 0]$, $B = [0, 1, 0, 2]$ a $C = [1, 2, 3, 4]$.

Příklad (7.2)

Určete příčku mimoběžek

$$\begin{aligned} p &: [3, 0, 3] + t \cdot (0, 1, 2) \\ q &: [0, -1, -2] + s \cdot (1, 2, 3), \end{aligned}$$

která je rovnoběžná s vektorem $v = (1, -2, 1)$.

Příklad (7.3)

V prostoru \mathbb{R}^4 jsou dány tři body $A = [1, 2, 3, 6]$, $B = [2, 3, 1, 6]$ a $C = [0, 1, 2, 6]$, které generují afinní podprostor \mathcal{M} . Dále \mathcal{N} je afinní podprostor zadaný implicitně

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 7 \\x_2 + x_3 - x_4 &= 2.\end{aligned}$$

Určete afinní podprostory $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ a $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ (včetně dimenzí).

Příklad (7.4)

Nechť v prostoru \mathbb{R}^4 je podprostor \mathcal{M} zadáný implicitně

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\x_1 + 3x_3 - x_4 &= 5.\end{aligned}$$

Určete vzájemnou polohu podprostoru \mathcal{M} a přímky p dané takto:

- a) $p : [4, 0, 3, -2] + t \cdot (1, -1, 1, -1)$,
- b) $p : [1, 1, 1, 1] + t \cdot (1, 1, 0, 1)$,
- c) $p : [1, 1, 1, 1] + t \cdot (1, -1, 0, 1)$.