

MB141 – 8. přednáška

Eukleidovská geometrie

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2022

- Eukleidovské prostory
- Velikost vektorů a vzdálenost podprostorů
- Odchylky podprostorů
- Orientovaný objem rovnoběžnostěnu
- Orientace a vektorový součin v \mathbb{R}^3

V afinní geometrii zkoumáme vzájemnou polohu geometrických útvarů, zatímco **eukleidovská geometrie** počítá jejich vzdálenosti, odchylky a objemy.

Standardní **bodový euklidovský prostor** \mathcal{E}_n je afinní prostor \mathcal{A}_n , jehož zaměřením je vektorový prostor \mathbb{R}^n se standardním skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \alpha)$ s ortonormální bazí α .

Vzdálenost bodů $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru \overrightarrow{AB}

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}.$$

Euklidovské podprostory v \mathcal{E}_n jsou afinní podprostory, jejichž zaměření uvažujeme spolu se standardním skalárním součinem.

Vzdálenost bodů

Vzdálenost bodů A a B budeme označovat $\text{dist}(A, B)$. Pro každé tři body $A, B, C \in \mathcal{E}_n$ platí

- $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, A)$, symetrie,
- $\text{dist}(A, B) = 0$ právě, když $A = B$,
- $\text{dist}(A, B) + \text{dist}(B, C) \geq \text{dist}(A, C)$, trojúhelníková nerovnost.

V kartézské souřadné soustavě $(A_0; \varepsilon)$ mají body

$$A = A_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \quad B = A_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

vzdálenost $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$.

Definice

Vzdálenost dvou afinních podprostorů \mathcal{P} a \mathcal{Q} definujeme takto

$$\text{dist}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \min\{\text{dist}(A, B) \mid A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{Q}\}.$$

Vzdálenost bodu od afinního podprostoru

Ukážeme si, jak počítat vzdálenost bodu A od roviny \mathcal{Q} v \mathcal{E}_3 . V rovině \mathcal{Q} uvažujme nějaký bod B . Potom $\mathcal{Q} = B + Z(\mathcal{Q})$. Nechť L je pata kolmice vedené z bodu A na rovinu \mathcal{Q} . (Malujte si obrázek.) Vzdálenost bodu A od roviny \mathcal{Q} je rovna vzdálenosti bodů A a L .

$$\text{dist}(A, \mathcal{Q}) = \text{dist}(A, L).$$

Přitom vektor $\vec{BA} = \vec{BL} + \vec{LA}$, kde \vec{BL} je kolmá projekce vektoru \vec{BA} do zaměření $Z(\mathcal{Q})$ a \vec{LA} je kolmá projekce do ortogonálního doplňku $Z(\mathcal{Q})^\perp$. Označíme-li

$P_{Z(\mathcal{Q})}$ kolmou projekci do $Z(\mathcal{Q})$ a $P_{Z(\mathcal{Q})^\perp}$ kolmou projekci do $Z(\mathcal{Q})^\perp$, dostáváme

$$\text{dist}(A, \mathcal{Q}) = \|P_{Z(\mathcal{Q})^\perp}(\vec{BA})\| \quad \text{a} \quad L = B + P_{Z(\mathcal{Q})}(\vec{BA}).$$

Příklad

Určete vzdálenost bodu $A = [2, 1, 2]$ a roviny

$$\mathcal{Q} : [1, 1, 1] + t(1, 1, 0) + s(0, 1, 1).$$

Vzdálenost bodu od roviny – řešení příkladu

Vzdálenost $A = [2, 1, 2]$ od $\mathcal{Q} : [1, 1, 1] + t(1, 1, 0) + s(0, 1, 1)$.

- Označme $B = [1, 1, 1]$. Prvně spočítáme ortogonální doplněk k zaměření roviny. Ten je generován vektorem $n = (1, -1, 1)$. Dále spočítáme kolmou projekci vektoru $u = \overrightarrow{BA} = (1, 0, 1)$ do $Z(\mathcal{Q})^\perp$. Tu hledáme ve tvaru $P_{Z(\mathcal{Q})^\perp}(u) = a \cdot n$. Platí $\langle u - a \cdot n, n \rangle = 0$. Odtud $a = \frac{2}{3}$. Proto

$$\text{dist}(A, \mathcal{Q}) = \left\| \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

- Nyní najdeme bod $L \in \mathcal{Q}$, ve kterém se vzdálenost realizuje, tj. $\text{dist}(A, L) = \text{dist}(A, \mathcal{Q})$.

$$\begin{aligned} L &= B + P_{Z(\mathcal{Q})}(u) = B + (u - P_{Z(\mathcal{Q})^\perp}(u)) \\ &= [1, 1, 1] + \left((1, 0, 1) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right) = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right] \end{aligned}$$

Vzdálenost bodu od roviny – alternativní řešení

Předchozí příklad jde také řešit tak, že prvně spočítáme kolmou projekci vektoru $\overrightarrow{BA} = u$ do zaměření $Z(Q)$. To je trochu složitější než počítat kolmou projekci do $Z(Q)^\perp$, neboť $\dim Z(Q) = 2 > 1 = \dim Z(Q)^\perp$. Pak najdeme bod L , kde se vzdálenost realizuje:

$$L = B + P_{Z(Q)}(u) = [1, 1, 1] + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

a odtud

$$\text{dist}(A, Q) = \text{dist}(A, L) = \|[2, 1, 2] - \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right]\| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

Vzdálenost bodu od afinního podprostoru obecně

Výpočet vzdálenosti bodu od libovolného afinního podprostoru v \mathcal{E}_n provádíme analogicky. Stačí k tomu umět počítat ortogonální doplněk a kolmou projekci, což jsme se naučili v 6. přednášce.

Věta

Nechť A je bod a \mathcal{Q} afinní podprostor v \mathcal{E}_n . Zvolme v \mathcal{Q} nějaký bod B . Pak

$$\text{dist}(A, \mathcal{Q}) = \|P_{Z(\mathcal{Q})^\perp}(\overrightarrow{BA})\|,$$

kde $P_{Z(\mathcal{Q})^\perp}$ je kolmou projekcí do ortogonálního doplňku zaměření $Z(\mathcal{Q})^\perp$.

Bod, v němž se vzdálenost realizuje je

$$Q = B + P_{Z(\mathcal{Q})}(\overrightarrow{BA}),$$

kde $P_{Z(\mathcal{Q})}$ je kolmou projekcí do zaměření $Z(\mathcal{Q})$.

Vzdálenost dvou přímek v \mathcal{E}_3

Mějme v \mathcal{E}_3 dvě přímky p a q . Jejich vzdálenost jsme definovali

$$\text{dist}(p, q) = \min\{\text{dist}(P, Q) \mid P \in p, Q \in q\}.$$

Představme si přímku, která je na obě přímky p a q kolmá.

Potom se při kolmé projekci na tuto přímku promítne každá z přímek p a q do jediného bodu. Vzdálenost přímek je vzdáleností těchto dvou bodů. Přesněji to znamená následující:

Vezměmě bod $A \in p$ a bod $B \in q$. Vzdálenost přímek p a q je rovna kolmé projekci vektoru \overrightarrow{AB} do ortogonálního doplňku k součtu zaměření $Z(p) + Z(q)$ obou přímek.

$$\text{dist}(p, q) = \|P_{(Z(p)+Z(q))^\perp}(\overrightarrow{AB})\|.$$

Body $P \in p$ a $Q \in q$ jsou charakterizovány vlastností

$$\overrightarrow{PQ} \perp (Z(p) + Z(q)).$$

Ukažme si výpočet na příkladu.

Příklad

V \mathcal{E}_3 určete vzdálenost přímek

$$p: [-4, 5, 5] + t(1, -1, 0), \quad \text{a} \quad q: [1, 6, 8] + s(0, 2, -1).$$

- Položme $A = [-4, 5, 5]$ a $B = [1, 6, 8]$. Vektor $\overrightarrow{AB} = u = (5, 1, 3)$.
- Ortogonální doplněk součtu zaměření $Z(p) + Z(q)$ je $[(1, -1, 0), (0, 2, -1)]^\perp = [(1, 1, 2)]; v = (1, 1, 2)$.
- Kolmá projekce vektoru u do $[v]$ je $\frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v = 2(1, 1, 2) = (2, 2, 4)$.
- Vzdálenost přímek je $\text{dist}(p, q) = \|(2, 2, 4)\| = 2\sqrt{6}$.
- Body $P \in p$ a $Q \in q$, které realizují vzdálenost přímek, určují vektor, který se rovná výše spočtené kolmé projekci: $\overrightarrow{PQ} = (2, 2, 4)$.

- Hledáme je ve tvaru $P = [-4, 5, 5] + t(1, -1, 0)$ a $Q = [1, 6, 8] + s(0, 2, -1)$. Dostaneme tak soustavu tří rovnic pro neznámé t a s :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Její řešení je $t = 3$ a $s = -1$. Proto $P = [-4, 5, 5] + 3(1, -1, 0) = [-1, 2, 5]$ a $Q = [1, 6, 8] + (-1)(0, 2, -1) = [1, 4, 9]$.
- Přímka PQ , která je kolmá k přímce p i q a obě přímky protíná, se nazývá **osa mimoběžek** p a q .

Vzdálenost podprostorů

Obecně se vzdálenost podprostorů počítá dle stejného principu. (Vzdálenost se realizuje v kolmém směru.)

Věta

Pro každé dva afinní podprostory \mathcal{P} a \mathcal{Q} v \mathcal{E}_n existují body $P \in \mathcal{P}$ a $Q \in \mathcal{Q}$, které realizují jejich vzdálenost, tj. $\text{dist}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \text{dist}(P, Q)$. Zvolíme-li $A \in \mathcal{P}$ a $B \in \mathcal{Q}$, je vektor

$$\overrightarrow{PQ} = P_{(Z(\mathcal{P})+Z(\mathcal{Q}))^\perp}(\overrightarrow{AB}),$$

kde $P_{(Z(\mathcal{P})+Z(\mathcal{Q}))^\perp}(\overrightarrow{AB})$ je kolmý průmět vektoru \overrightarrow{AB} do $(Z(\mathcal{P}) + Z(\mathcal{Q}))^\perp$. Vzdálenost \mathcal{P} a \mathcal{Q} je tedy

$$\text{dist}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \|(P_{Z(\mathcal{P})+Z(\mathcal{Q})^\perp}(\overrightarrow{AB}))\|$$

Příklad

Určete vzdálenost podprostorů v \mathcal{E}_5 :

$$\sigma : [3, 3, 5, 4, 1] + a(0, 1, 0, 2, -1) + b(1, -1, 1, 0, -1)$$

$$p : [2, -1, 2, 2, 3] + s(1, -1, 1, -1, 1).$$

$$Z(\sigma) + Z(p) = U = [(0, 1, 0, 2, -1), (1, -1, 1, 0, -1), (1, -1, 1, -1, 1)],$$

$$U^\perp = [(1, 0, -1, 0, 0), (1, 3, 1, -2, -1)],$$

$$A = [3, 3, 5, 4, 1], B = [2, -1, 2, 2, 3],$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -4, -3, -2, 2).$$

Je třeba určit projekci \overrightarrow{AB} do U^\perp .

Zkuste dopočítat sami.

Projekcí do U^\perp určíme i projekci do U a naopak. Proto si můžeme vybrat, do kterého z těchto dvou podprostorů bude jednodušší projekci počítat.

Pro dva nenulové vektory u a v vždy platí

$$0 \leq \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \leq 1.$$

Má tedy smysl následující definice.

Definice

Odchylka $\alpha(u, v)$ vektorů $u, v \in V$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \alpha(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}, \quad 0 \leq \alpha(u, v) \leq \pi.$$

Definice

- 1) **Odchylyka dvou přímek** p a q se zaměřenými $[u]$ a $[v]$ je úhel $\alpha(p, q) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pro který platí

$$\cos \alpha(p, q) = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|}.$$

- 2) Nechť p je přímka se zaměřením $[u]$ a ρ je rovina v \mathcal{E}_3 . **Odchylyka přímky p a roviny ρ** je úhel $\alpha(p, \rho) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ který se rovná odchylce vektoru u od kolmé projekce $P(u)$ vektoru u do zaměření roviny:

$$\cos \alpha(p, \rho) = \frac{|\langle u, P(u) \rangle|}{\|u\| \|P(u)\|} = \frac{\|P(u)\|}{\|u\|}.$$

Definice

- 3) Jsou-li ρ a σ dvě roviny v \mathcal{E}_3 , které jsou totožné nebo rovnoběžné, pak je jejich odchylyka rovna 0.
- 4) Je-li průnikem dvou rovin ρ a σ v \mathcal{E}_3 přímka p , pak je jejich odchylyka $\alpha(\rho, \sigma)$ rovna úhlu, který svírá přímka $Z(\rho) \cap Z(p)^\perp$ s přímkou $Z(\sigma) \cap Z(p)^\perp$ (nakreslete si obrázek)

$$\alpha(\rho, \sigma) = \alpha(Z(\sigma) \cap Z(p)^\perp, Z(\rho) \cap Z(p)^\perp).$$

Při počítání odchylyky dvou rovin lze také využít skutečnost, že jejich odchylyka je rovna odchylyce jejich normálových přímek (přímek kolmých k rovinám). Při počítání odchylyky přímky p od roviny ρ s normálovou přímkou n je $\alpha(p, \rho) = \frac{\pi}{2} - \alpha(p, n)$.

Příklad

Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$ (ve standardním označení, tj. $ABCD$ a $A' B' C' D'$ jsou stěny, AA' pak hrana). Určete odchylnu vektorů AB' a AD' .

Uvažujme krychli o hraně 1 a umístěme ji v \mathbb{R}^3 tak, že bod A bude mít ve standardní bázi souřadnice $[0, 0, 0]$, bod B pak souřadnice $[1, 0, 0]$ a bod C souřadnice $[1, 1, 0]$. Potom má bod B' souřadnice $[1, 0, 1]$ a bod D' souřadnice $[0, 1, 1]$. Pro vyšetřované vektory tedy můžeme psát

$$AB' = B' - A = [1, 0, 1] - [0, 0, 0] = (1, 0, 1),$$

$AD' = D' - A = [0, 1, 1] - [0, 0, 0] = (0, 1, 1)$. Podle definice odchylny φ těchto vektorů je pak

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle}{\| (1, 0, 1) \| \| (0, 1, 1) \|} = \frac{1}{2},$$

tedy $\varphi = 60^\circ$.

Příklad

Určete odchylnu rovin

$$\sigma: [1, 0, 2] + t \cdot (1, -1, 1) + s \cdot (0, 1, -2),$$

$$\rho: [3, 3, 3] + t \cdot (1, -2, 0) + s \cdot (0, 1, 1).$$

Průsečnice má směrový vektor $(1, -1, 1)$. Kolmá rovina k ní má rovnici $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Její průniky se zaměřenými daných rovin jsou postupně $[(1, 0, -1)]$ a $[(0, 1, 1)]$. Tyto přímky svírají úhel 60° , neboť

$$\cos \alpha = \frac{\langle (1, 0, -1), (0, 1, 1) \rangle}{\| (1, 0, -1) \| \| (0, 1, 1) \|} = \frac{1}{2}.$$

Rovnoběžnostěn a jeho objem

Definice

Nechť u_1, u_2, u_3 , jsou lineárně nezávislé vektory v zaměření \mathbb{R}^n , $A \in \mathcal{E}_3$ je libovolný bod. **Rovnoběžnostěn** $\mathcal{P}(A; u_1, u_2, u_3) \subseteq \mathcal{E}_3$ je množina

$$\mathcal{P}(A; u_1, u_2, u_3) = \{A + c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \mid 0 \leq c_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$

Orientovaný objem rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}(A, u_1, u_2, u_3)$ daného vektory $u_1 = (a, b, c)$, $u_2 = (d, e, f)$ a $u_3 = (g, h, i)$ je

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}.$$

Orientace v prostoru

Řekneme, že uspořádaná trojice vektorů u_1, u_2, u_3 je **kladně orientovaná báze** vektorového prostoru \mathbb{R}^3 , jestliže determinant matice 3×3 , v jejichž sloupcích stojí postupně souřadnice vektorů u_1, u_2 a u_3 je kladný. Je-li tento determinant záporný, mluvíme o záporně orientované bázi.

Ve fyzice se tento pojem přibližuje pomocí tzv. **pravidla pravé ruky**: Položte pravou ruku na vektor u_1 tak, aby malíček ukazoval ve směru vektoru u_1 a zahnuté prsty ve směru vektoru u_2 . Ukazuje-li palec ve směru u_3 , má báze u_1, u_2, u_3 kladnou orientaci.

Viditelnost. Pomocí orientace můžeme zjišťovat viditelnost. Mějme v \mathcal{A}_3 čtyřstěn $ABCD$. Bod X leží na stejné straně roviny ABC jako bod D , jestliže trojice $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AX})$ má stejnou orientaci jako trojice $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$. Je-li příslušný determinant pro první trojici nulový, leží bod X v rovině ABC . Je-li orientace různá, je z bodu X vidět stěna ABC zadaného čtyřstěnu.

Vektorový součin v \mathbb{R}^3

Vektorový součin v \mathbb{R}^3 je zobrazení $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, které vektorům $x = (x_1, x_2, x_3)$ a $y = (y_1, y_2, y_3)$ přiřazuje vektor $x \times y = z = (z_1, z_2, z_3)$ takový, že

$$z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad z_2 = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Vztah mezi vektorovým součinem a skalárním součinem je dán vzorcem

$$\forall u \in \mathbb{R}^3 : \langle z, u \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Z tohoto vzorce lze vyčíst geometrický význam vektorového součinu. Vektor $x \times y$ je vektor kolmý k oběma vektorům x i y , jeho velikost je obsahem rovnoběžníku určeného vektory x a y a jsou-li x a y lineárně nezávislé, pak jsou vektory x , y a $x \times y$ kladně orientované.

Shodná zobrazení v \mathcal{E}_3

Řekneme, že zobrazení $F : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$ je **shodnost v prostoru**, jestliže pro každé dva body X a $Y \in \mathcal{E}_3$ platí

$$\text{dist}(F(X), F(Y)) = \text{dist}(X, Y).$$

Lze ukázat, že takové zobrazení je bijekce, zobrazuje přímky na přímky, roviny na roviny a zachovává odchylky mezi těmito afinními podprostory.

Shodná zobrazení jsou složením těchto tří typů:

- 1) Posunutí o pevný vektor u

$$F(X) = X + u.$$

- 2) Otočení kolem přímky p o úhel α . Zvolme pevně $A \in p$.
Potom

$$F(X) = A + R_\alpha(X - A),$$

kde $R_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je otočení kolem přímky $Z(p)$ procházející počátkem.

3) Symetrie podle roviny ρ . Necht' $A \in \rho$ je pevný bod. Pak

$$F(X) = A + S_{Z(\rho)}(X - A) = A + (X - A) - 2P_{Z(\rho)^\perp}(X - A),$$

kde $S_{Z(\rho)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny $Z(\rho)$ procházející počátkem. Tuto symetrii můžeme spočítat pomocí kolmé projekce $P_{Z(\rho)^\perp}(X - A)$ vektoru $X - A$ do $Z(\rho)^\perp$. (Namalujte si obrázek.)

Počítání se shodnými zobrazeními si ukážeme na cvičení.

Umět počítat:

- Vzdálenost bodu a podprostoru.
- Vzdálenost přímek (osa mimoběžek).
- Odchylku dvou přímek, odchylka přímky a roviny.
- Odchylku dvou rovin mající jednodimenzionální průnik zaměření.
- Objem rovnoběžnostěnu a čtyřstěnu.
- Viditelnost.
- Vektorový součin.
- Shodná zobrazeními v \mathcal{E}_3 .

Příklad (8.1)

V euklidovském prostoru \mathbb{R}^3 určete vzdálenost bodu $B = [2, 0, 3]$ od přímky $p : [-1, 0, 0] + t(2, -2, 1)$.

Příklad (8.2)

V prostoru \mathbb{R}^3 je dán čtyřstěn $ABCD$, kde $A = [-1, 0, 1]$, $B = [1, 2, -1]$, $C = [-3, 2, 1]$ a $D = [5, 2, 3]$. Bud' P pata výšky spuštěná z vrchlu D do roviny stěny ABC . Určete souřadnice bodu P a velikost výšky DP . Dále určete objem čtyřstěnu $ABCD$. Dále je dán bod $X = [2, 3, -10]$. Zjistěte, které stěny čtyřstěnu $ABCD$ jsou z něho vidět.

Příklad (8.3)

V euklidovském prostoru \mathbb{R}^4 určete vzdálenost roviny σ a přímky p :

$$\sigma : [0, 0, 1, 1] + a \cdot (0, 1, 0, 1) + b \cdot (1, -1, 2, 0)$$

$$p : [1, 4, 2, 0] + c \cdot (-1, 1, 1, 0)$$

a body v nichž se realizuje.

Příklad (8.4)

V \mathbb{R}^3 určete odchylku roviny $\sigma : x + 2y + z = 5$ a

- i) přímky $p : [1000, 2013, 0] + t \cdot (1, 1, 1)$;
- ii) roviny $2x + y - z = 2013$.

Příklad (8.5)

Mějme v \mathbb{R}^3 body $A = [2, -1, 3]$, $B = [1, 2, 3]$ a $C = [2, -3, 8]$.
Určete obsah trojúhelníku ABC .