# Lineární modely

- Leslieho populační model
- Markovovy procesy
- pozitivita matic

stádo ovcí - 5 věkových kategorií

| | |
|---|---|
| $1 \to 2$ | 0,95 (pravděp. přežití z kat. 1 do 2) |
| $2 \to 3$ | 0,8 |
| $3 \to 4$ | 0,7 |
| $4 \to 5$ | 0,6 |
| $2 \to 1$ | 0,2 |
| $3 \to 1$ | 0,8 |
| $4 \to 1$ | 0,6 |

$x = (x_1, \dots, x_5)$ počáteční stav

$y = (y_1, \dots, y_5)$ stav za 1 rok

$$y_1 = 0{,}2x_2 + 0{,}8x_3 + 0{,}6x_4$$

$$y_2 = 0{,}95x_1 \qquad y_4 = 0{,}7x_3$$

$$y_3 = 0{,}8x_2 \qquad y_5 = 0{,}6x_4$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$$

po 20 letech:

$$A^{20}x$$

$Ax = \lambda x$ $\lambda$ - koeficient růstu/vymírání stáda

$x$ - stabilní poměr kategorií

$\lambda_m$ - vedoucí $\lambda_m > |\lambda|$ pro ostatní vl. čísla

$Ax - \lambda x = 0$

$(A - \lambda E)x = 0$

$|A - \lambda E| = 0$ $\rightsquigarrow$ kořeny $\lambda$, vybereme max. $\lambda_m$

$\boxed{\lambda_m \approx 1{,}03}$ ostatní: $0$; $-0{,}5$; $-0{,}27 \pm i \cdot 0{,}74$

$$\lambda \begin{cases} > 1 & \text{roste} \\ = 1 & \text{konst.} \\ < 1 & \text{vymírá} \end{cases}$$

$\underbrace{x \approx (30, 27, 21, 14, 8)}_{\tilde{x}}$ $n$ - stud. počet

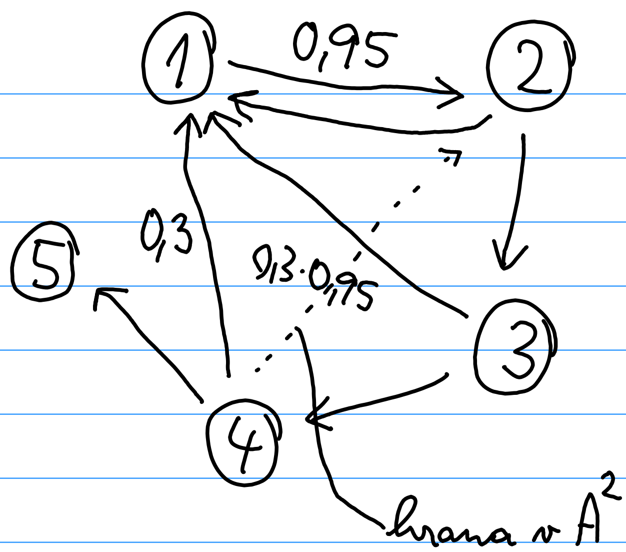
$\sum \tilde{x}_i = n$

obecná matice:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & & f_m \\ \tau_1 & & & & \\ & \tau_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \\ & & & \tau_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$f_i$ - přírůstek pocházející z kateg. $i$

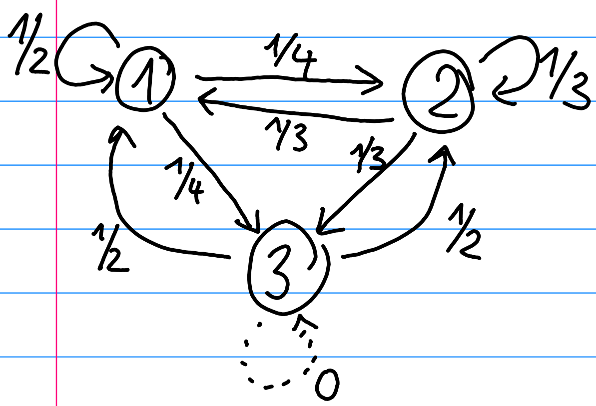
$\tau_i$ - pravděp. přechodu z kateg. $i$ do $i+1$




„smysluplné" výsledky:
- vedoucí vl. číslo
- vlastní vektor označuje počty (je kladný)
- je zaručeno pro **pozitivní** matici $A$ } V.

$A$ pozitivní, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $A^n$ je kladná (má všechny hrany kladné)

# Markovské procesy




1,2,3 – TV stanice

$i \to j$ – divák přechází od $i$ k $j$ (pravděp.)

vstupy

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{matrix}\right) & \\ 3 & & & \end{array} = A$$

$$A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Chceme vědět, v jakém poměru se ustálí sledovanost stanic.

výstupy

$$A^2 \text{"="} \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ primitivní

Kdyby $A^2$ nebyla kladná, můžeme pomocí počítat $A^4, A^8, A^{16}, \dots$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

očekáváme $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1/2-1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3-1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix} \text{ záv.}$$

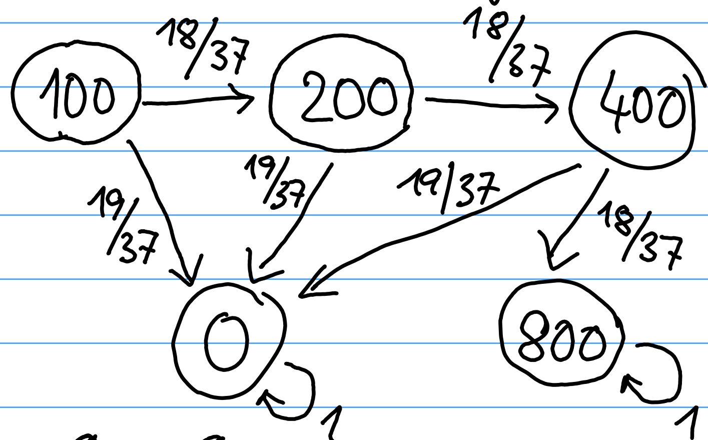
$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$(4, 3, 2)$ – vl. vektor

nás ale zajímá pravděp. vektor
„s jakou pravděp. se daný divák dívá zrovna na kanál $i$?"
normalizujeme vektor $(4,3,2) \sim (4/9, 1/3, 2/9)$

vstupní matice je pravděpodobnostní,
tj. všechny buňky jsou z $[0;1]$,
součet v každém sloupci je 1
Očekáváme vlastní číslo 1 (vedoucí),
tzn. rovnou počítáme řešení
homogenní soustavy pro matici $A-E$
Výsledek obvykle požadujeme jako
pravděp. vektor, tj. normalizujeme vlastní
vektor tak, aby součet složek byl 1.

hráč – má 100 Kč, sází jen na černou (všechno),
odchází, když má 0 nebo 800 Kč




$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 19/37 & 19/37 & 19/37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18/37 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18/37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18/37 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

$$\begin{pmatrix} + & + & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & + \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} + & + & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & + \end{pmatrix} = A^2$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} + & + & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & + \end{pmatrix}$$

$$A^8 = A^4 \overset{?}{=} A^3$$

A není primitivní

⇒ není zaručen jednoznačný ve vektor

$$A-E=\begin{pmatrix} 0 & 19/37 & 19/37 & 19/37 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18/37 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18/37 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18/37 & 0 \end{pmatrix}$$

prostor řešení $-\ [(1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1)]$