MB141 – lineární algebra a diskr. matematika

- řešení soustav lin. rovnic
- popis geometrických vztahů analyticky
- počítání s maticemi
- lineární modely

– diskrétní matematika (teorie čísel)

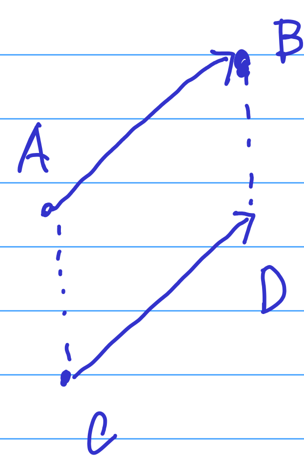
- aplikace v kryptografii

3 : 1

1. přednáška: Geometrie v rovině

Body A, B, C

Vektory – uspořádané dvojice bodů



$\vec{AB} = B - A$

ABDC tvoří rovnoběžník, pak

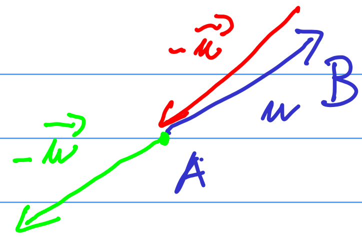
$\vec{AB} = \vec{CD}$

Vektor je pro nás „šipka, kterou lze umístit do kteréhokoliv bodu"

Operace s vektory

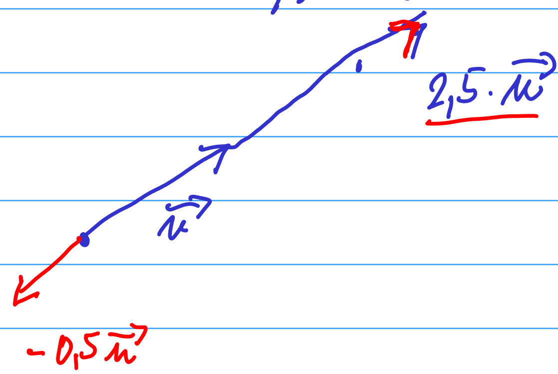
Nulový vektor $\vec{o} = \vec{AA}$

Opačný vektor k $\vec{AB}$ je $\vec{BA}$

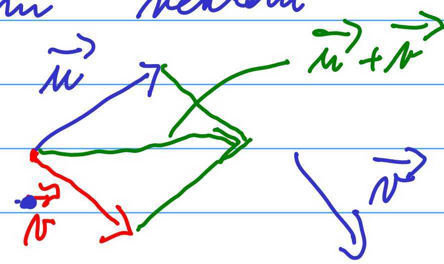


Násobení vektoru reálným číslem

$a \cdot \vec{u}$



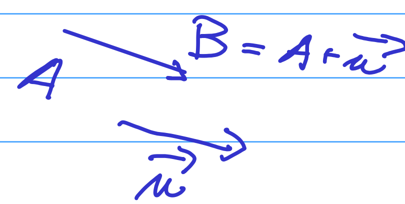
Sčítání vektorů - rovnoběžníkové pravidlo



Body a vektory

$A + \vec{u} = B$

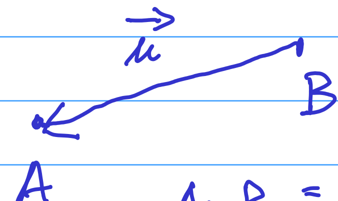
bod + vektor = bod



odčítání bodů

$A - B = \vec{u}$

bod - bod = vektor

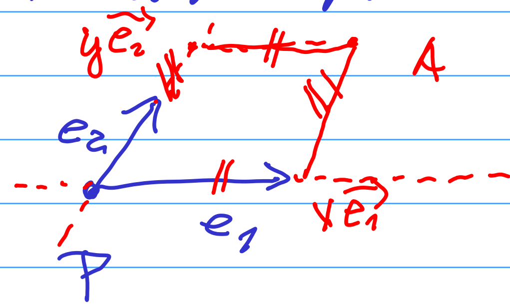


$A - B = \overrightarrow{BA}$

Souřadný systém

Počátek .. bod P

Dva vektory neležící v přímce $\vec{e_1}, \vec{e_2}$



Každý bod A lze psát ve tvaru

$$A = P + x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

Souřadnice jsou $[x, y]$.

Souřadnice vektoru $\vec{u} = B - A$

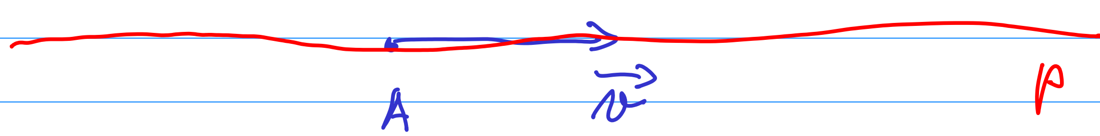
pro $B = [x_B, y_B]$, $A = [x_A, y_A]$

je $\vec{u} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

Přímky

p prochází bodem A se směr. vektorem $\vec{v}$

$p: \quad X = A + t \cdot \vec{v}$, t parametr, $t \in \mathbb{R}$



$v = (v_x, v_y)$

V souřadnicích $X = [x, y]$ $A = [a, b]$

$$x = a + t v_x$$
$$y = b + t v_y$$

parametrický popis přímky

Obecná rovnice přímky

$p = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 ; s x + q y + r = 0\}$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ reálná čísla

Z parametrického popisu obecný

$v_x \neq 0$ $x = a + t v_x$

$$\frac{x-a}{v_x} = t$$

$$y = b + t v_y$$

$$y = b + \frac{x-a}{v_x} v_y \quad / \cdot v_x$$

$$v_x y - v_y x = b v_x - a v_y$$

$$-v_y x + v_x y - b v_x + a v_y = 0$$

$$s x + q y + r = 0$$

Zde při zadávání směrový vektor

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (q, -s)$$

Afinní kombinace bodů

A, B $\overleftrightarrow{AB}$ $X = A + t(B - A)$

$$X = A + t(B-A)$$

$$X = A + tB - tA = (1-t)A + tB$$

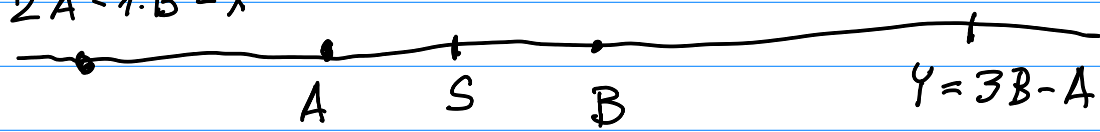
afinní kombinace bodů

je bod $a\,A + b\cdot B$, $a, b \in \mathbb{R}$

kde $a + b = 1$

$1\cdot A + 0\cdot B = A$ $\quad$ $A + 1\cdot B = B$

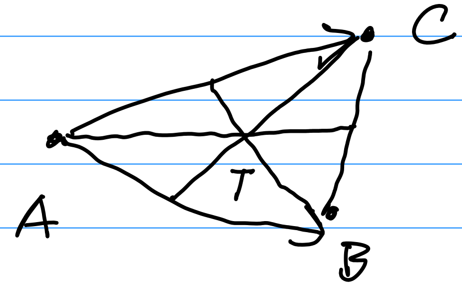
$2A - 1\cdot B = X$



$$S = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B = A + \tfrac{1}{2}(B-A)$$

$$X = 2A - 1B = A - (B-A)$$

Na slidech: pomocí afinních kombinací dokaž, že těžnice v trojúhelníku se protínají v jednom bodě



$$X = a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C$$

$$a + b + c = 1$$

$T = \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}C$ těžiště trojúhelníka

Příklad Průsečík přímek

$p: \; x + 2y = 200$

$q: \; 2x - 9y = 10.$

Řešíme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých

$$\begin{aligned} x + 2y &= 200 \\ 2x - 9y &= 10 \\ \hline -2x - 4y &= -400 \\ 2x - 9y &= 10 \\ \hline \end{aligned}$$

Sečíst

$$\begin{aligned} -13y &= -390 \\ y &= 30 \\ x + 2 \cdot 30 &= 200 \\ x &= 140 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax + by &= r \qquad / \; c \neq 0 \\ cx + dy &= s \qquad / \; -a \neq 0 \\ \hline cax + cby &= cr \\ -cax - ady &= -sa \\ \hline (cb - ad)\, y &= cr - as \end{aligned}$$

1. Jestliže $cb - ad = 0$ a $cr - as \neq 0$, nemá soustava řešení! Přímky jsou rovnoběžné!
2. Jestliže $cb - ad = 0$ a $cr - as = 0$, soustava má nekonečně mnoho řešení! Přímky jsou totožné!

(3) Jestliže $cb - ad \neq 0$, má soustava jediné řešení. Přímky mají jeden průsečík.

Číslo $ad - bc$ hraje důležitou roli. Je to tzv. determinant.

Soustava
$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{matice } 2 \times 2$$

Definice Determinant matice
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
je číslo
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Skalární součin vektorů

u, v dva vektory

$\langle u, v \rangle$ je reálné číslo

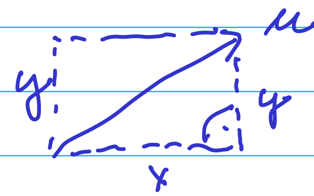
$u = (x_1, y_1) \quad v = (x_2, y_2)$

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Velikost vektoru

Pyth. věta

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

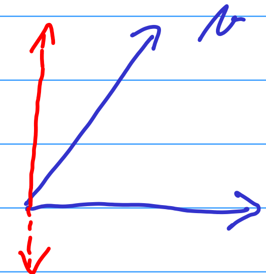


$$= \sqrt{x\cdot x + y\cdot y} = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

$$\|u\| = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow u = \vec{o}$$

Kolmost vektorů

Vektory u, v jsou na sebe kolmé, jestliže $\langle u,v\rangle = 0$



$v = (b,c)$

$a \neq 0$

$u = (a,0)$

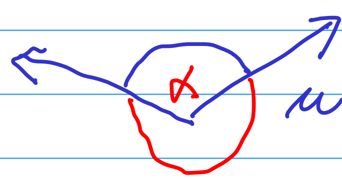
$$\langle u,v\rangle = a\cdot b + 0\cdot c = ab$$

$$\langle u,v\rangle = 0 \iff b = 0$$

Odchylka vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je úhel $\alpha \in [0,\pi]$

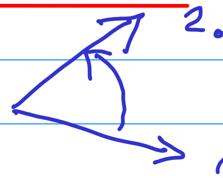
$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

Toto číslo je vždy mezi -1 a 1

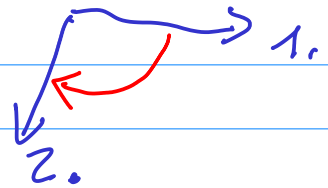


ORIENTACE

uspořádaná dvojice vektorů $\vec{u}, \vec{v}$



Kladná orientace

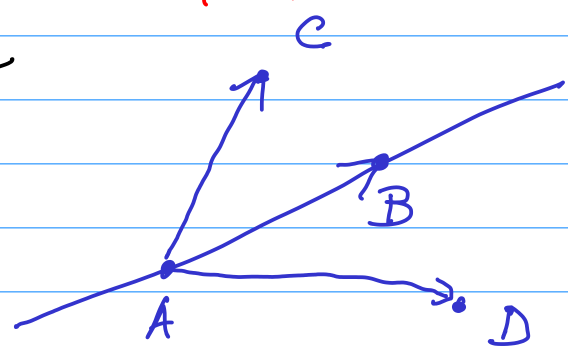


ve směru hod. ručiček
záporná orientace

Nesmí být jeden násobkem 2. vektoru

$$or(\vec{u}, \vec{v}) = -\,or(\vec{v}, \vec{u})$$

or = orientace



Výpočet orientace ze souřadnic

$\vec{u} = (x_1\ y_1)$, $\vec{v} = (x_2\ y_2)$

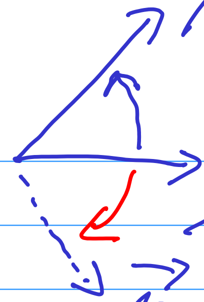
Orientace $(\vec{u}, \vec{v})$ je znaménko determinantu

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$u = (1, 0)$$

$$v = (x_2, y_2)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot y_2 - 0 \cdot x_2 = y_2$$



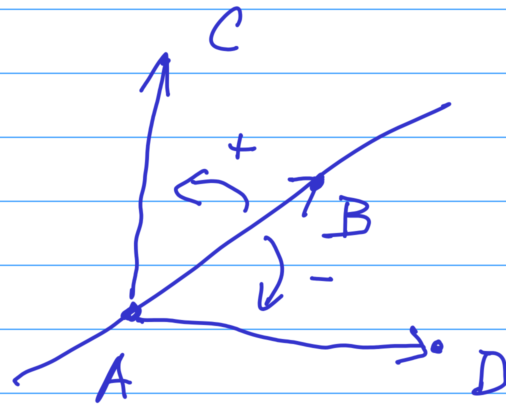
$\vec{v} = (x_2, y_2)$ $y_2 > 0$

kladná orientace

$\vec{u} = (1,0)$

$\vec{v} = (x_2, \tilde{y}_2)$ $\tilde{y}_2 < 0$

záporná orientace



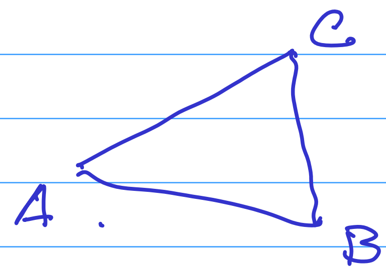
$$\mathrm{or}\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = + \;\Big|\; \det\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) > 0$$

$$\mathrm{or}\left(\vec{AB}, \vec{AD}\right) = - \;\Big\|\; \det\left(\vec{AB}, \vec{AD}\right) < 0$$

Dva body leží na stejné straně přímky AB právě když příslušné determinanty mají stejné znaménko.

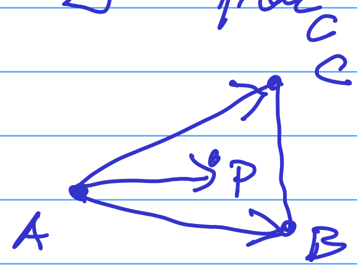
Body C, D leží v úhlech sdružených, protože mají RŮZNÁ znaménka.

Zjišťování viditelnosti:



body P, R máte zjistit sami

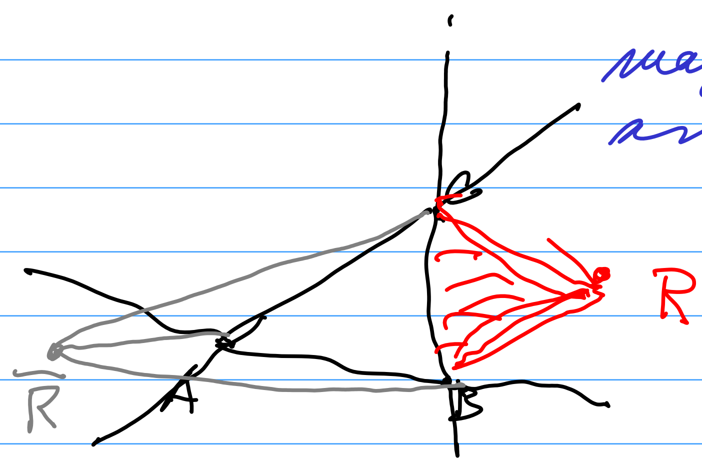
1) leží uvnitř Δ
2) pokud neleží, které strany Δ jsou z nich vidět



$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})$ a $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

mají stejná znaménka

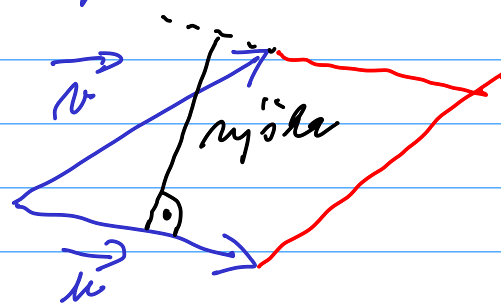


Viditelnost 1) z R červeného je vidět strana BC

2) z $\bar{R}$ šedého jsou vidět strany AC a BC.

Orientovaný obsah rovnoběžníku

Středoškolský obsah rovnoběžníku



Obsah $S = \|\vec{u}\| \cdot$ výška na u

Orientovaný obsah rovnoběžníku určeného vektory $(\vec{u}, \vec{v})$ označíme S_{or}

1) Je-li $S = 0$, je $S_{or} = 0$
2) Je-li $S \neq 0$, je

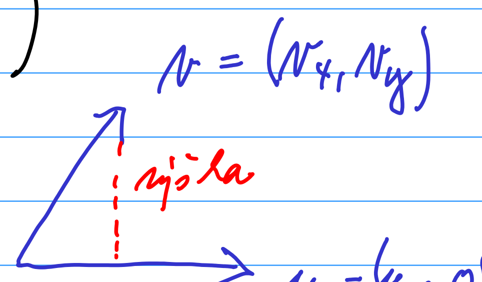
$$S_{or} = S \cdot \text{znaménko orientace}$$

$$or(\vec{u}, \vec{v}) > 0 \Rightarrow S_{or} = S$$
$$or(\vec{u}, \vec{v}) < 0 \Rightarrow S_{or} = -S$$

Věta: Orient. obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$ je

$$\det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$$

„Zdůvodnění"



Obsah madiciné

$$S = \|u\| \cdot \text{výška} = |u_x| \cdot |v_y|$$

Determinant

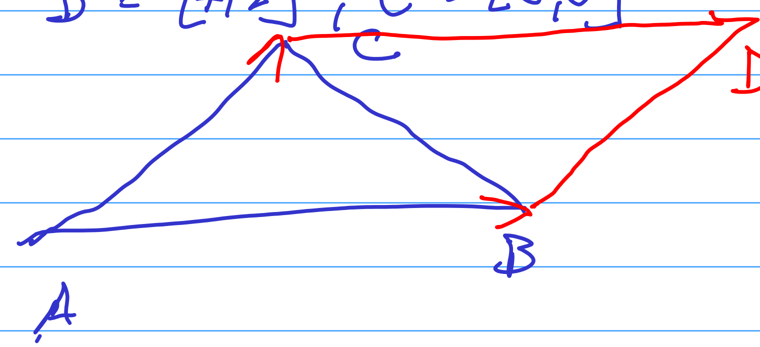
$$\det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ 0 & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - 0 \cdot v_x$$
$$= u_x \cdot v_y$$

$$S_\sigma = u_x \cdot v_y$$

$$S = |u_x \cdot v_y|$$

Příklad : $\triangle ABC$

$A = [1,1]$, $B = [7,2]$, $C = [5,5]$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| 6 \cdot 4 - 1 \cdot 4 \right| = \frac{1}{2} 20 = \underline{\underline{10}}$$

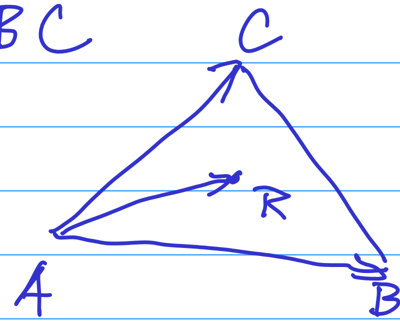
Příklad $\triangle ABC$

$A = [10,-4]$, $B = [18,6]$, $C = [25,18]$

$R = [15, 3]$

Rozhodněte, zda R leží uvnitř

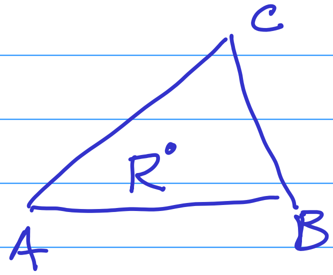
$\triangle ABC$



$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} = 8\cdot 22 - 15\cdot 10 > 0$$

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR}\right) = \det\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} = 8\cdot 7 - 5\cdot 10 = 6 > 0$$

- C, R leží ~~na~~ nalevo od $\overrightarrow{AB}$



$AC = (15, 22)$

$AB = (8, 10)$

$AR = (5, 7)$

$\det(AC, AB) < 0$ viz výše

$= -\det(AB, AC)$

$$\det(AC, AR) = \det\begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 22 & 7 \end{pmatrix} = 15\cdot 7 - 5\cdot 22 = -5 < 0$$

- Body R a B leží napravo od $\overrightarrow{AC}$

• Musíme zjistit, zda A a R leží na stejné straně od $\overrightarrow{BC}$.

$$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BR}) = \det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = -7\cdot 3 + 3\cdot 12 > 0$$

$$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 12 & -10 \end{pmatrix} = -7\cdot 10 + 8\cdot 12$$
$$= -70 + 76 > 0$$

A a R leží na stejnou stranu od $\overrightarrow{BC}$.