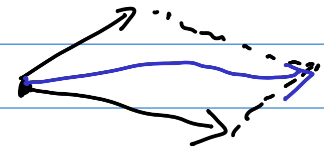
4. přednáška VEKTOROVÉ PROSTORY

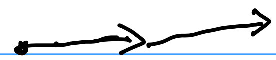
Rovina



sčítání

násob. reálným číslem

$2\vec{u}$



Vektorový prostor nad reálnými čísly $\mathbb{R}$

je neprázdná množina V s operacemi

sčítání $+ : V \times V \to V \quad (u,v) \mapsto u+v$

násobení číslem $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V \quad (a,v) \mapsto av$

s vlastnostmi:

1) $\forall u,v \in V \quad u+v = v+u$
2) $\forall u,v,z \in V \quad (u+v)+z = u+(v+z)$
3) $\exists \vec{0} \in V \ \forall v \in V \quad v+\vec{0} = \vec{0}+v = v$
4) $\forall v \in V \ \exists (-v) \in V \quad v+(-v) = \vec{0} = (-v)+v$
5) $\forall a,b \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$
$$(a+b)\cdot v = a\cdot v + b\cdot v$$
6) $\forall a \in \mathbb{R} \ \forall u,v \in V$
$$a\cdot(u+v) = a\cdot u + b\cdot v$$
7) $\forall a,b \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$
$$a\cdot(b\cdot v) = (ab)\cdot v$$
8) $\forall v \in V \quad 1\cdot v = v$

Příklady (1) Rovina ..... $\mathbb{R}^2$

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$$
$$a\cdot(x_1,x_2) = (ax_1, ax_2)$$

(2) $\mathbb{R}^n$ $n \geq 1$ přirozené

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n$$

$$a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$$

(3) $V = \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$

Umíme sčítat a násobit reálným číslem.

(4) Polynomy v proměnné x s reálnými koeficienty $\mathbb{R}[x]$

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0)$$

$$= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0) \cdot 1$$

$$c\,(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)$$

$$= c a_n x^n + c a_{n-1} x^{n-1} + \dots + c a_0$$

(5) Polynomy stupně nejvýše n

$\mathbb{R}_n[x]$ sčítání i násobení definována stejně

(6) Všechny reálné funkce na množině $M \neq \emptyset$.

$$\mathbb{R}^M = \{f : M \to \mathbb{R}\}$$

$m \in M \quad (f+g)(m) = f(m) + g(m)$

$$(cf)(m) = cf(m)$$

Podmnožiny vekt. prostorů, které jsou samy vekt. prostory

<u>Příklad</u> A matice $k \times n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \; A x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

operace na $\mathbb{R}^n$ sčítání vektorů a násobení číslem

$x, y \in V$ leží součet $x+y$ rovněž ve V?

$$A(x+y) = A \cdot x + A \cdot y = 0 + 0 = 0$$

$$x, y \in V \implies x + y \in V$$

V je neprázdná

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ je řešení, leží ve V

$x \in V$ pak pro $c \in \mathbb{R}$

$$A(cx) = c\,Ax = c \cdot 0 = 0$$

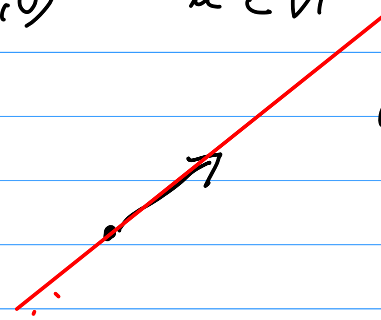
$$x \in V \implies cx \in V$$

Definice Podmnožina U vekt. prostoru V se nazývá **vekt. podprostor**, je-li

1) neprázdná
2) $u, v \in U \Rightarrow u+v \in U$
3) $u \in U,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow cu \in U$

Třídy podprostorů v $\mathbb{R}^2$

1) • pouze počátek $\quad U = \{(0,0)\}$
2) $\exists\, u \neq (0,0) \quad u \in U$

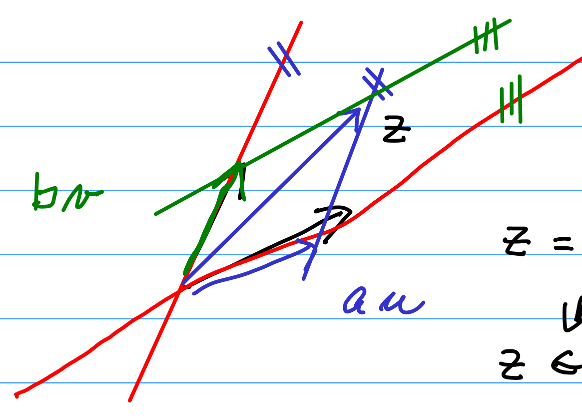


Jako násobky vytváří přímku

$$U = \{ a \cdot u \in \mathbb{R}^2,\ a \in \mathbb{R} \}$$

• přímka procházející počátkem je vekt. podprostor.

3) $\exists\, u, v \in U$ neležící v přímce



$z = au + bv$

$\Downarrow$

$z \in U$

V tomto případě
- $U = \mathbb{R}^2$.

Analogicky v $\mathbb{R}^3$
- počátek
- přímky proch. počátkem
- roviny proch. počátkem
- celé $\mathbb{R}^3$

Další vlastnosti operací + a · ve vekt. prostorech

- $a \cdot \vec{u} = \vec{o}$ právě když $a = 0 \in \mathbb{R}$ nebo $\vec{u} = \vec{o} \in V$
- $(-1)\,\vec{u} = -\vec{u}$

  násobení -1 dává opačný vektor
- odčítání vektorů
  $$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Dohoda Písmena u, v, w, z jsou vektory, a, b, c jsou reálná čísla.

$$a\,(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v}$$

Lineární kombinace vektorů

$u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ vekt. prostor je vektor

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k \in V$$

pro nějaká reálná čísla $a_1, a_2, \dots a_k$.

Vekt. podprostor U ve V lze definovat vlastností

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \ \forall \vec{u},\vec{v} \in U \quad a\vec{u} + b\vec{v} \in U$$

Lineární obal vektorů

$$u_1, u_2, \dots, u_k \in V$$

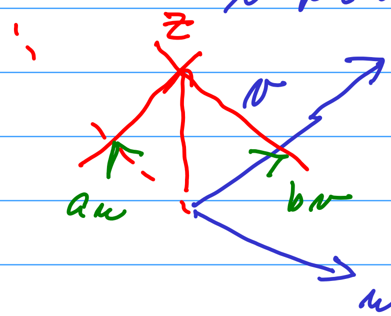
$$[u_1, u_2, \dots, u_k] = \{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k \in U, \ a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{u} = \vec{0} \qquad [\vec{0}] = \{\vec{0}\}$$

$$\vec{u} \neq \vec{0} \qquad [u] = \{a\vec{u}, \ a \in \mathbb{R}\}$$

přímka

$\vec{u}, \vec{v}$ nenulové vektory neležící v přímce



$$[u,v] = \{au + bv, \ a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$z = au + bv$$

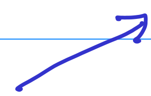
V tomto případě $[u,v]$ je rovina.

Jinak: Lin obal $[u_1, u_2, \dots u_k]$

je NEJMENŠÍ vekt. podprostor obsahující vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Cílem je ve vekt. prostoru V najít množinu vektorů takovou, že lineární kombinace dají všechny vektory ve V a navíc, aby každá lin. kombinace byla jednoznačná.

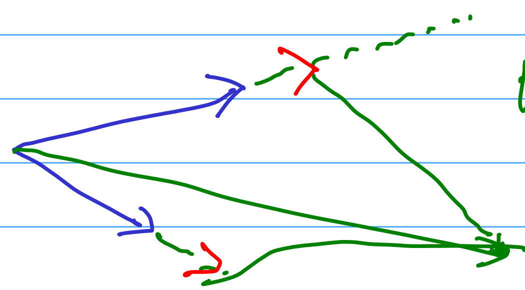
<u>Příklad</u> $V=\mathbb{R}^2$ jediný vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$



$[u]$ je přímka

$[u] \neq \mathbb{R}^2$

Dva vektory, které neleží v přímce



$\forall z \in \mathbb{R}^2$

$z = au + bv$

Tři vektory $u=(1,0)$, $v=(0,1)$, $z=(1,1)$

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

$$(a,b) = (a-b)(1,0) + b(1,1)$$

Vektor (a,b) nemá jednoznačné vyjádření.

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ ve vekt. prostoru V jsou lineárně nezávislé, jestliže $\forall a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{R}$ platí

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

Jiná formulace – matlicka na počítání

Rovnice $\quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$

v neznámých $a_1, a_2 \dots a_k \in \mathbb{R}$

má jediné řešení

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Příklad $\quad v_1 = (1,1,1), \; v_2\,(-1,0,1), \; v_3 = (1,2,3)$

jsou lin. nezávislé v $\mathbb{R}^3$?

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = \vec{0}$$

$$a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Porovnání 1., 2. a 3. složky

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 &= 0\\ a_1 + 2a_3 &= 0\\ a_1 + a_2 + 3a_3 &= 0\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\1&0&2&0\\1&1&3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&1&0\\0&2&2&0\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\qquad \begin{aligned}a_3&=t\\a_2&=-t\\a_1&=-2t\end{aligned}$$

$$a_3=-1,\quad a_2=1,\quad a_1=2$$

$$2v_1+v_2-v_3=0$$

Vekt. jsou lin. závislé.

$$v_3 = 2v_1+v_2$$

OBECNĚ

Vektory jsou lin. závislé

$\Longleftrightarrow$ jeden je lin. kombinací ostatních

Formulace je nepraktická pro počítání! Museli bychom řešit 3 rovnice

$$\begin{cases} a u_2 + b u_3 = u_1 \\ \bar{a} u_1 + \bar{b} u_3 = u_2 \\ \bar{\bar{a}} u_1 + \bar{\bar{b}} u_2 = u_3 \end{cases}$$

Podle 1. definice stačí řešit jednu!

$$\hat{a} u_1 + \tilde{b} u_2 + \tilde{c} u_3 = \vec{o}$$

Další příklad v $\mathbb{R}_4[x]$

$x^3 - x + 1$, $2x^3 + x^2 - 2x$,

$x^4 + x^3 - x$, $x^4 - x^2 + 1$

jsou lin. nezávislé?

$$a_1(x^3 - x + 1) + a_2(2x^3 + x^2 - 2x) + a_3(x^4 + x^3 - x) + a_4(x^4 - x^2 + 1) = 0$$

Porovnáme koeficienty u

$$\begin{array}{lllll} x^4: & & & a_3 + a_4 & = 0 \\ x^3: & a_1 & + 2a_2 & + a_3 & = 0 \\ x^2 & & a_2 & - a_4 & = 0 \\ x & -a_1 & - 2a_2 & - a_3 & = 0 \\ 1 & a_1 & & + a_4 & = 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \text{schod. tvar}$$

Máme pouze 3 ved. koeficienty

$\Rightarrow$ více řešení $\Rightarrow$ lin. závislé

Báze vekt. prostoru V

je množina vektorů

$v_1, v_2, \dots v_n$ taková, že

(1) $\forall u \in V \ \exists a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

(Říkáme, že vektory $v_1, v_2 \dots v_n$ generují prostor V,

$$[v_1, v_2 \dots v_n] = V \;)$$

(2) $v_1, v_2 \dots v_n$ jsou lin. nez.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Odtud plyne pro vektory báze

$\forall u \in V \ \exists! \ (a_1, a_2 .. a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + .. + a_n v_n$$

Koeficienty v lin. kombinaci

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ se nazývají souřadnice vektoru u v bázi $v_1, v_2 ... v_n$

Příklady:

(1) $\mathbb{R}^2$ stand. báze $\quad$ dim = 2

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Každý vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\mathbb{R}^2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

je určí báze

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 2 & x_2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 3 & x_1 + x_2 \end{array}\right)$$

a, b spočteme a máme jediné řešení

$$b = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

$$a = x_1 - \frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} x_1 - \frac{x_2}{3}$$

$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ souřadnice u ve stand. bázi

$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ souřadnice u v bázi α jsou

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{3} \\ \frac{2x_1 - x_2}{3} \end{pmatrix} = (u)_\alpha$$

souřadnice vektoru u v bázi α

- $\mathbb{R}^n$ stand. báze   dim $= n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $Mat_{k\times n}(\mathbb{R})$

$Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

formă bază (stand. baza în $Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$)

$\dim Mat_{k\times n}(\mathbb{R}) = k\cdot n$

- $\mathbb{R}_n[X]$ stand. baza și

$1, X, X^2, \dots X^n$ $\qquad \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$

- $V = \{x \in \mathbb{R}^4, Ax = 0\}$

Baze într-un sistem lin. omogen : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_3 = b, \; x_2 = a, \; x_1 = -a-b$

$(-a-b, a, b) = a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1)$

Báze je $(-1,1,0)$ a $(-1,0,1)$.

- $\mathbb{R}[x]$ nemá konečnou bázi
  nekonečná báze je $1, x, x^2, \dots x^n, \dots$

Prostory, které lze generovat konečným počtem vektorů, se nazývají konečně dimenzionální.

PLATÍ:

- Každý konečně dim. prostor má bázi.
- Každé dvě báze v konečně dim. prostoru mají STEJNÝ počet vektorů.

Dimenze vekt. prostoru V nad $\mathbb{R}$ je počet vektorů báze $\dim_{\mathbb{R}} V$.

Je-li U podmnožina V, je $\dim_{\mathbb{R}} U \leq \dim_{\mathbb{R}} V$.

Úlohy:

V $\mathbb{R}^5$ je dán podprostor

$$M = [\overset{v_1}{(1,0,2,0,1)}, \overset{v_2}{(0,2,1,-1,1)}, \overset{v_3}{(2,-4,2,2,0)}, \overset{v_4}{(2,1,3,1,1)}, \overset{v_5}{(0,1,0,0,0)}] \subseteq \mathbb{R}^5$$

Najděte bázi M.

Vektory zapíšeme do sloupců matice

$$\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \text{upravujeme na schod. tvar} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & & a_4 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Výpočet vede k zápisu:

Vektory v_1, v_2 a v_4 jsou lin. nezávislé. v_3 je lin. kombinace v_1 a v_2, v_5 je lin. kombinace v_1, v_2, v_4. Proto báze M je (v_1, v_2, v_4).

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_4 v_4 = 0$$

Z úprav výše provedených dostaneme $a_1 = a_2 = a_4 = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_4$ jsou LN

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = v_3$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_4 v_4 = v_5$$

Toto je algoritmus, který z vektorů vybírá lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

$\Rightarrow$ Slouží k nalezení báze lineárního obalu.

Průnik a součet podprostorů

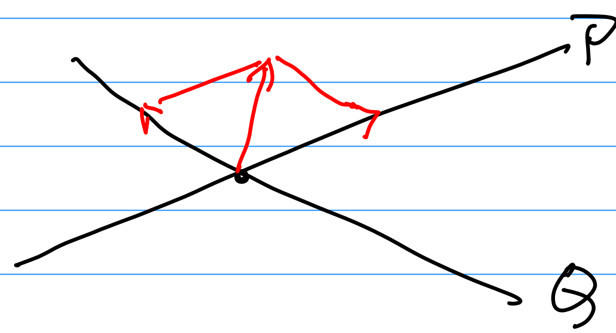
P, Q podprostory ve vekt. prostoru V

Průnik $P \cap Q$ je vekt. podprostor

Sjednocení $P \cup Q$ není obecně podprostor !

Příklad $V = \mathbb{R}^2$

$P \cup Q$ není vekt. podprostor



PROTO

Definujeme součet podprostorů

$$P + Q = \{ u + v \in V ;\ u \in P,\ v \in Q \}$$

V příkladu: $P + Q = \mathbb{R}^2$

$P + Q$ je nejmenší podprostor obsahující sjednocení $P \cup Q$.