6. přednáška

Skalární součin

V $\mathbb{R}^2$ $\quad \langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$

$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

1) $\langle ax + bz, y\rangle = a\langle x,y\rangle + b\langle z,y\rangle$

2) $\langle x, ay + bz\rangle = a\langle x,y\rangle + b\langle x,z\rangle$

3) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

4) $\forall x \neq \vec{0} \quad \langle x,x\rangle > 0$.

V obecném vekt. prost. nad $\mathbb{R}$
Skal. součin je zobrazení
$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
které má vlastnosti 1), 2), 3) a 4)

① $\mathbb{R}^n$
$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

Stand. skal. součin

② $\mathbb{R}^2$ $\quad \langle x,y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$

(4) $\langle x,x\rangle = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 =$
$$= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0 \quad \text{pro } (x_1, x_2) \neq (0,0).$$

(3) $V = \mathbb{R}[x]$

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

$$\langle a p_1 + b p_2, q \rangle = \int_0^1 \left(a p_1(x) + b p_2(x)\right) q(x)\, dx$$

$$= a \int_0^1 p_1(x)\, q(x)\, dx + b \int_0^1 p_2(x)\, q(x)\, dx$$

Velikost vektoru $u \in V$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

$$x \in \mathbb{R}^3 \qquad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Vektory $u, v \in V$ jsou na sebe kolmé (ortogonální), jestliže

$$\langle u, v \rangle = 0 .$$

$\boxed{\text{Cauchyova nerovnost}}$

Pro $u, v \in V$ platí

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

Rovnost nastane právě když u a v jsou lin. závislé (jeden je násobek druhého).

Př: $\mathbb{R}^2$: $\quad |x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

Obecně: nerovnost $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$

$u \neq 0, v \neq 0$ dělíme součinem $\|u\|\|v\|$

$$\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

To znamená

$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

Úhel vektorů u a v je číslo $\alpha \in [0, \pi]$ takové, že

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \|v\|}$$

Ortogonální báze je báze složená z navzájem kolmých vektorů

Ortonormální báze je báze složená z navzájem kolmých vektorů jednotkové velikosti

$u_1, u_2, \dots, u_n$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Příklad $M \subseteq \mathbb{R}^4$

$$M = [\overset{v_1}{(1,1,1,1)}, \overset{v_2}{(1,0,0,3)}, \overset{v_3}{(1,2,1,0)}]$$

Hledáme ortonorm. bázi M.

Prvně hledáme ortog. bázi u_1, u_2, u_3

$$u_1 = v_1 = (1,1,1,1)$$

$$u_2 = v_2 - a u_1$$

$$0 = \langle u_2, u_1 \rangle = \langle v_2, u_1 \rangle - a \langle u_1, u_1 \rangle = 0$$

$$a = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{4}{4} = 1$$

$$u_2 = v_2 - u_1 = (1,0,0,3) - (1,1,1,1) = (0,-1,-1,2)$$

$$u_3 = v_3 - b u_1 - c u_2$$

$$0 = \langle u_3, u_1 \rangle = \langle v_3, u_1 \rangle - b \langle u_1, u_1 \rangle - c \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0}$$

$$b = \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{4}{4} = 1$$

$$0 = \langle u_3, u_2 \rangle = \langle v_3, u_2 \rangle - b \underbrace{\langle u_1, u_2 \rangle}_{0} - c \langle u_2, u_2 \rangle = 0$$

$$c = \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$u_2 = (0,-1,-1,2)$$

$$u_3 = v_3 - u_1 + \frac{1}{2} u_2 = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$M = [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]$$

ortogonální báze

$$\| a u \| = \sqrt{\langle a u, a u \rangle} = \sqrt{a^2 \langle u, u \rangle} = |a| \, \|u\|$$

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \frac{1}{\|u\|} \|u\| = 1$$

Z u_1, u_2, u_3 dostaneme ortonormální bázi

$$z_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,-1,-1,2),$$

$$\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\|\;\|\; \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$$

Tento postup nazýváme
Grammův - Schmidtův ortog. proces.

ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK

V vekt. prostor se skal. součinem

$U \subseteq V$ podprostor

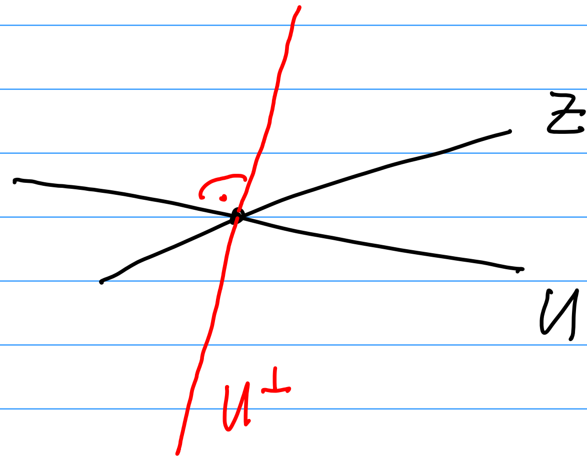
Ortog. doplněk vekt. podprostoru U je podprostor

$$U^\perp = \{ v \in V : \forall u \in U \ \langle v, u \rangle = 0 \}$$

Platí 1) $U + U^\perp = V$

2) $U \cap U^{\perp} = \{0\}$

Platí 1) a 2) píšeme $U \oplus U^{\perp} = V$



$U \subseteq \mathbb{R}^2$

$U + Z = \mathbb{R}^2$

$U \cap Z = \{0\}$

$U \oplus Z = \mathbb{R}^2$

Najděte ortog. doplněk k podprostoru $U \subset V$

$$V = \mathbb{R}^4 \qquad U = [\overset{u_1}{(1,2,0,1)}, \overset{u_2}{(-1,0,3,2)}]$$

$$U^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^4, \ \langle x, u_1 \rangle = 0, \ \langle x, u_2 \rangle = 0\}$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

znamená řešit soustavu hom. lin. rovnic:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$U^{\perp}$ dostaneme řešením této hom. soustavy.

$$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$$

Kolmá (ortogonální) projekce do podprostoru $U \subseteq V$ je zobrazení

$$P_U : V \longrightarrow U \subseteq V$$

Jak ji spočítáme? Každý vektor $v \in V$ lze psát jednoznačně jako součet

$$v = u_1 + u_2$$

kde $u_1 \in U$, $u_2 \in U^\perp$

Definujeme: $P_U(v) = u_1 \in U$

Příklad $V = \mathbb{R}^5$

$v = (0,2,6,0,5)$

$U = [u_1 = (1,0,1,0,2),\ u_2 = (-1,2,3,2,1)]$

Chceme spočítat $P_U(v)$ a také $P_{U^\perp}(v)$.

Projekci hledáme ve tvaru

$$P_U v = \underline{a}\, u_1 + \underline{b}\, u_2 \qquad P_U(v) \in U$$

$$v = \underbrace{P_U v}_{\in U} + \underbrace{v - P_U(v)}_{\in U^\perp}$$

Proto:

$$v - P_U(v) \perp U$$

$$\perp u_1, u_2$$

To vede na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $\underline{a}, \underline{b}$:

$$\langle v - a u_1 - b u_2, u_1 \rangle = 0$$

$$\langle v - a u_1 - b u_2, u_2 \rangle = 0$$

Úprava

$$\langle v, u_1\rangle - a\langle u_1, u_1\rangle - b\langle u_1, u_2\rangle = 0$$
$$\langle v, u_2\rangle - a\langle u_1, u_2\rangle - b\langle u_2, u_2\rangle = 0$$

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \langle u_1, u_2\rangle \\ \langle u_1, u_2\rangle & \langle u_2, u_2\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1\rangle \\ \langle v, u_2\rangle \end{pmatrix}$$

Po spočítání skalárních součinů:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 16 \\ 4 & 19 & 27 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}$$

$$P_U v = 2u_1 + u_2 = (1{,}2{,}5{,}2{,}5)$$

Chceme kolmou projekci do $U^\perp$

$$v = P_U v + P_{U^\perp} v$$

$$\underline{P_{U^\perp} v = v - P_U v} \qquad \begin{array}{l} \dim U = 2 \\ \dim U^\perp = 3 \end{array}$$

$$P_{U^\perp}(v) = (0{,}2{,}6{,}0{,}5) - (1{,}2{,}5{,}2{,}5)$$
$$= (-1{,}0{,}1{,}-2{,}0).$$

ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

Lineární zobrazení
$$\varphi : V \to V$$

se nazývá <u>ortogonální operátor</u> (transformace), jestliže platí

$\forall u, v \in V \qquad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

Odtud plyne

1) $\|\varphi(u)\| = \|u\| \qquad \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \langle u, u \rangle$

2) $u \perp v \Rightarrow \varphi(u) \perp \varphi(v)$

$0 = \langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$

3) úhel vektorů $u, v \qquad \measuredangle(u, v)$

je stejný jako úhel vektorů $\varphi(u), \varphi(v)$

$\measuredangle(\varphi(u), \varphi(v))$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle}{\|\varphi(u)\| \, \|\varphi(v)\|} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|}$$

Kdy je lineární zobrazení

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi(x) = Ax$

ortogonální? Pro jaké matice?

Odpověď: Pro matice A takové, že

$$A \cdot A^T = E$$

Důkaz: $\langle x, y \rangle = (x_1, x_2, \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T \cdot y$

x, y sloupce

$\langle Ax, Ay \rangle = (A \cdot x)^T \cdot Ay =$

$$= x^T \cdot A^T \cdot A \cdot y = x^T (A^T \cdot A) \cdot y$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$x^T (\underbrace{A^T \cdot A}) \cdot y = x^T \cdot y = x^T \underbrace{E} y$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{A^T}_{n \times n} \cdot \underbrace{A}_{n} = E$$

$$A^T = A^{-1}$$

$$A \cdot A^T = E$$

Skutečnost $A \cdot A^T = E$ lze jinak vyjádřit takto:

Sloupce matice A tvoří orton. bázi.

Řádky matice A tvoří orton. bázi.

Takové matice se nazývají ortogonální. Ortogonální matice 2×2 a 3×3 popisují nám dobře známá geometrická zobrazení.

VĚTA: Determinant ortogonální matice je roven ± 1. Vlastní čísla ortogonální matice mají abs. hodnotu 1.

$$A \cdot A^T = E$$

$$\det(A \cdot A^T) = \det E$$

$$\det A \cdot \det A^T = 1$$

$$(\det A)^2 = 1$$

$$\det A = \pm 1.$$

Vlastní čísla (reálná) jsou ± 1

$\lambda \in \mathbb{R}$ vl. číslo $\quad v \neq \vec{0}$ vl. vektor

$$\varphi(v) = \lambda v$$

$$\|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$$

$$\lambda = \pm 1$$

Ortogonální transformace v rovině

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = Ax \qquad A \ 2 \times 2$

1) $\det A = 1$. Potom nemá matice A reálná vlastní čísla a φ je otočení kolem počátku proti směru hod. ručiček o úhel α.

Ten je jednoznačně určen maticí

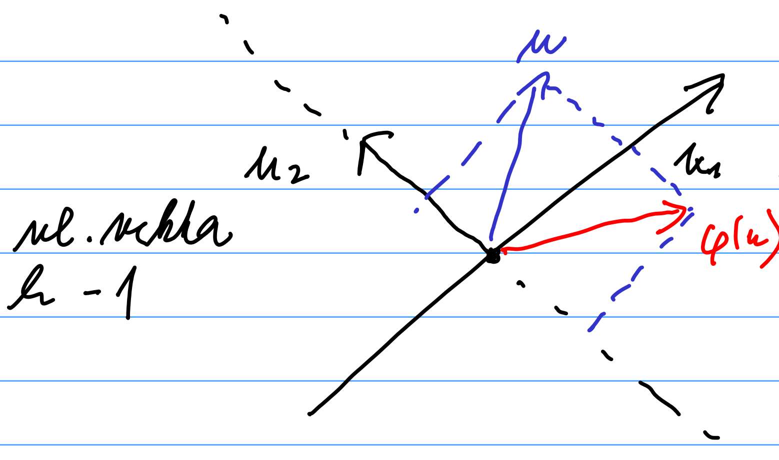
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} ac + bd &= 0 \\ a^2 + b^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \cos\alpha \\ b &= \sin\alpha \\ c &= -\sin\alpha \\ d &= \cos\alpha \end{aligned}$$

2) $\det A = -1$ v tomto případě má φ vlastní čísla 1 a -1.

φ je symetrie podle osy procházející počátkem je směrovým vektorem rovným vlastnímu čísla k 1.



$\varphi(au_1) = au_1$

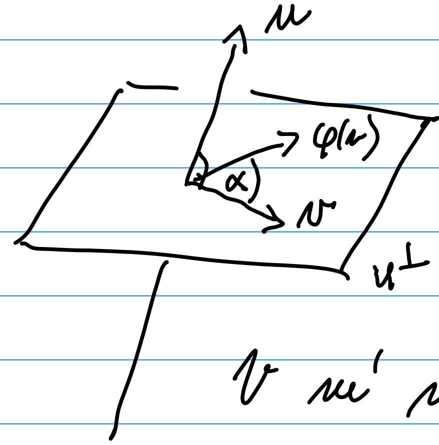
$\varphi(bu_2) = -bu_2$

Ortogonální transformace v $\mathbb{R}^3$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

A 3×3 ortogonální.

1) det A = 1 V tomto případě má φ vl. čísla 1 a jedná se o otočení kolem přímky procházející počátkem se směr. vektorem u = vlastní vekt. k 1. Otočení je o úhel α, který spočítáme takto.



Vezmeme rovinu $u^\perp$ kolmou k u

V ní nějaký vektor $v \neq \vec{0}$

Spočítáme jeho obraz $\varphi(v)$.

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, \varphi(v) \rangle}{\|v\| \, \|\varphi(v)\|}$$

(2) det A = −1 V tomto případě má φ vlastní číslo −1 a φ je složením dvou zobrazení:

První je otočení kolem osy

a mezi vektorem u = vlastní vektor k (-1).

Druhé zobrazení je symetrie podle roviny kolmé k vlastním u = vl. vektor k (-1). Rovina je $u^{\perp}$.

Příklad v $\mathbb{R}^3$ $\quad \varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x) = Ax \qquad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\cdot(-27) = -1.$$

Počítáme vl. vektor k vl. číslu -1

$$(A + 1E)\,x = 0$$

Vlastní vektor $\quad v = (1, 1, 2)$

Vezmeme nějaký kolmý vektor

$$u = (1, -1, 0)$$

$$\varphi(u) = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Úhel otočení α: $\cos\alpha = \dfrac{\langle u, \varphi(u)\rangle}{\|u\|\,\|\varphi(u)\|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 1$ Proto $\alpha = 0$.

Závěr: φ je symetrie podle roviny kolmé k $(1,1,2)$

Její rovnice je tedy

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 .$$

Příklad 2 $\quad \varphi(x) = Bx$

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \frac{1}{27}(-27) = -1$$

Vl. vektor k -1 je

$v = (1,1,1)$.

$u \perp v \qquad u = (1,-1,0)$

$Bu = (-1,0,1)$

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, Bu\rangle}{\|u\|\,\|Bu\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$\alpha = \frac{2}{3}\pi$ tj. 120°

Závěr: zobrazení je složení symetrie podle roviny $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ je kolmá k $v = (1,1,1)$.

a otočení kolem osy

$t \cdot (1,1,1)$

a úhel $120°$ ve směru

od $(1,-1,0)$ k $(-1,0,1)$.