3. cvičení z MB141 – soustavy lineárních rovnic a násobení matic

Pokyny pro cvičící: Spočítejte příklady nejprve příklady s označením A. Teprve pak řešte zbývající příklady s označením B.

Příklad. 1A. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}$$

Řešení. Nemá řešení. □

Příklad. 2A. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Řešení. Řešení je

$$\begin{aligned}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] &= [-1-t, 0, 1+s, s, t] = [-1, -t, 0, 1+s, t] = \\ &= [-1, 0, 1, 0, 0] + s(0, 0, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

□

Příklad. 3A. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \end{array}$$

Řešení. Jediné řešení $[0, 2, 5/3, -4/3]$. □

Příklad. 3B. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 17x_3 & - & 29x_4 & - & 36x_5 & = & 22 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 18x_3 & - & 27x_4 & + & 33x_5 & = & 21 \\ 12x_1 & - & 18x_3 & + & 102x_3 & - & 174x_4 & - & 216x_5 & = & 132 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 21x_3 & - & 24x_4 & - & 30x_5 & = & 20 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 24x_3 & - & 21x_4 & - & 27x_5 & = & 19 \end{array}$$

Návod. Velkých koeficientů není třeba se bát, řešení vyjde "hezky". □

Příklad. 4A. Zjistěte, zda jde matice násobit , a pokud ano, vynásobte je.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 21 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad. 4B. Vynásobte následující dvě matice a výsledek vyčíslete s použitím součtových vzorců pro goniometrické funkce

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix}.$$

Na základě toho ukažte, že zobrazení

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{pmatrix}$$

je otočení kolem počátku v rovině o úhel α.

Příklad. 5A. Matice A a B tvaru $n \times n$ jsou dány předpisem:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \geq j, \\ 2, & \text{if } i < j, \end{cases} \qquad B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leq j, \\ 3, & \text{if } i > j. \end{cases}$$

Vypočtěte, čemu se rovná jejich součin.

Návod. Pro obecné n spočtěte $(A \cdot B)_{ij}$ zvlášť pro $i \leq j$ a pro $i \geq j$. □

Příklad. 5B. Označme $\mathrm{op}(A)$ výsledek elementární řádkové úpravy matice A tvaru $k \times n$. Pro jednotlivé druhy úprav dokažte, že platí

$$\mathrm{op}(A) = \mathrm{op}(E_k) \cdot A,$$

kde E_k je jednotková matice tvaru $k \times k$. Říká se tomu, že řádkové úpravy lze realizovat násobením matice zleva.