4. cvičení z MB141– inverzní matice a determinant, jaro 2022

Pokyny pro cvičící: Spočítejte příklady nejprve příklady s označením A. Teprve pak řešte zbývající příklady s označením B.

Příklad. 1A. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Příklad. 1B. Spočtěte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Řešení. Řešení najdete v knize Matematika drsně a svižně, příklad 2.13.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -7 & 11 & -9 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad. 2A. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku proveďte aspoň částečně.

Řešení. Inverzní matice je

$$\begin{pmatrix} 154 & -179 & -205 & 235 \\ -36 & 42 & 48 & -55 \\ 6 & -7 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad. 3A. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Řešení. Inverzní matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & a^4 \\ 0 & 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad. 4A. Spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) pomocí řádkových úprav,
b) pomocí Laplaceova rozvoje vhodného řádku.

Řešení. 32 □

Příklad. 5A. Spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) pomocí řádkových úprav,
b) pomocí Laplaceova 1. řádku a indukce.

Příklad. 5B. Spočtěte determinant matice $n \times n$ pro $n \geq 2$

$$\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2-n \end{pmatrix}$$

Návod. Začněte tím, že k 1. řádku přičtete všechny ostatní řádky. □

Příklad. 6A. Zjistěte, pro které parametry a, b, $c \in \mathbb{R}$ je soustava rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & bx_2 & & & = & c \\ cx_1 & & & + & ax_3 & = & b \\ & & cx_2 & + & bx_3 & = & a \end{array}$$

jednoznačně řešitelná. Pro tyto parametry najděte řešení pomocí Cramerova pravidla.