6. cvičení z MB141, jaro 2022

Pokyny pro cvičící. Příklady 1 a 2 jsou z minulého cvičení. Dále se pokuste vyřešit příklady 3A (stačí 3 úkoly ze 4), 4A, 5A, 6A a 7A. Další úlohy dělejte v pořadí 8A (stačí výpočet vlastních čísel), 9A a 10A (v něm jsou vlastní čísla komplexní. Reálné vlastní vektory neexistují, komplexní vlastní vektory nepočítáme).

Příklad. 1A. Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$P = [(4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)],$$
$$Q = [(1, -1, 0, 2), (2, 2, -1, 3), (0, 1, 1, 0)].$$

Řešení. Průnik má dimenzi 2 a bázi např. $(1, -1, 0, 2), (-2, -1, 2, -3)$. □

Příklad. 1B. Najděte bázi a dimenze součtu a průniku podprostorů U a V v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$U = [(1, 1, -1, -1), (2, 3, 2, -2)],$$
$$V = [(2, 0, 1, 1), (4, 4, 7, -1), (0, 1, 1, 0)].$$

Příklad. 2A. Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] |\, f(1) = 0,\ f(2) = 0\} \quad \text{a} \quad Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] |\, g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

Řešení. $\dim P = 3$, $\dim Q = 3$, $\dim P \cap Q = 1$, $\dim P + Q = 5$, tedy $P + Q = \mathbb{R}_4[x]$. Více na http://www.math.muni.cz/~xfrancirekp/vyuka/seste_cviceni/osme_cviceni.pdf □

Příklad. 2B. Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_5[x] |\, f(1) = 0,\ f(-1) = 0\} \quad \text{a} \quad Q = \{g \in \mathbb{R}_5[x] |\, g(-x) = -g(x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

Příklad. 3A. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1 x_2,$
(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2),$
(c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2)^2),$
(d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2)).$

Příklad. 3B. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 + 1 \\ x_2 - x_1 & 4x_1 \end{pmatrix},$
(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 \\ x_2 - x_1 & 4x_1 \end{pmatrix},$
(c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R},\ \varphi(p) = p(1)^3 + p(2),$

(d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R},\ \varphi(p) = p(3) + 2p(1).$

Příklad. 4A. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = u_1,\ \varphi(u_2) = u_3,\ \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Příklad. 4B. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme bázi $u_1 = (2, 1)$, $u_2 = (1, 2)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = (4, 10, 16),\ \varphi(u_2) = (5, 11, 17).$$

Najděte matici A tvaru 3×2 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Příklad. 5A. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 - x_3 = 0$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.

Příklad. 5B. Nechť φ je lineární zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $u_1 = (1, -2, 1)$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$. (Podobný příklad byl řešen ve slajdech k 5. přednášce.)

Příklad. 6A. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 7A. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 7B. Najděte vlastní čísla a báze vlastních podprostorů lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaného maticí

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 8A. Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 8B. Najděte vlastní čísla a báze vlastních podprostorů lineárního zobrazení φ : $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadaného maticí

$$D = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 9A. Zjistěte, zda v $\mathbb{R}^3$ existuje báze tvořená vlastními vektory matice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, najděte ji.

Příklad. 10A. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$