7. cvičení z MB141 – skalární součin, jaro 2022

Bylo by dobré udělat všechny příklady, na složitější příklady 5 a 6 je potřeba si ponechat dostatek času. Řešte je způsobem vyloženým na 6. přednášce bez počítání charakteristického polynomu a komplexních vlastních čísel. Příklad 4 řešte tak, že najdete obrazy tří lineárně nezávislých vektorů.

Příklad. 1. Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$S = [(1, 2, -1, 3, 1),\ (5, 2, -1, 7, 1),\ (2, -1, 2, -4, -2)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem. Použijte k tomu prvně Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces a potom získané vektory ortogonální báze vynormujte (tj. vydělte jejich velikostí, abyste získali vektory velikosti 1).

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$M = [(1, 2, -1, -3, 3),\ (1, -2, 3, 1, -1)]\,.$$

Příklad. 3. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2, 11, -3, -4, 7)$ do podprostoru M a jeho ortogonálního doplňku $M^{\perp}$ z předchozího příkladu.

Příklad. 4. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 5. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 6. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úlohy k k domácímu procvičení s výsledky

Příklad. 1. Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$V = [(1, 1, 3, 3, 4),\ (1, 3, -5, -7, -1),\ (1, -1, 5, 7, -3)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem.

Řešení. Ortonormální báze je $\frac{1}{6}(1,1,3,3,4)$, $\frac{1}{7}(2,4,-2,-4,3)$, $\frac{1}{6\sqrt{5}}(7,7,3,3,-8)$. □

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte kolmou projekci vektoru $u = (1,2,3,4,5)$ do vektorových podprostorů

$$V = [(3,3,2,1,3),\ (5,1,4,-1,1)]$$
$$W = [(1,-3,4,-2,2),\ (1,5,-8,-2,4),\ (1,-9,16,4,-4)]$$

Ve druhém případě spočtěte prvně ortogonální doplněk $W^\perp$ a kolmou projekci vektoru u do $W^\perp$.

Řešení. Projekce do V je $(2,4,1,2,4)$ a projekce do W je $(4,1,2,3,3)$. □

Příklad. 3. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na přímku p procházející počátkem se směrovým vektorem $(1,-2,1)$. Najděte matici B tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Bx = B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Příklad. 4. V souřadnicích standardní báze je zobrazení φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe určeno maticí

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Určete, o jaké zobrazení se jedná.

Řešení. Symetrie podle roviny kolmé k vektoru $(1,-2,1)$ procházející počátkem. Její rovnice je $x_1 = 2x_2 + x_3 = 0$. □

Příklad. 5. Zjistěte jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Otáčení kolem přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $(1,-1,0)$ o úhel $\pi/2$. □