8. cvičení z MB141, jaro 2021

První polovinu cvičení věnujte řešení písemky z 22. 4. V druhé části vyřešte úlohy 1, 2, 3 (zde lze pomocí kolmé projekce nebo pomocí normály, jedno udělejte pořádně, u druhého ukažte pouze, jak by se postupovalo). K úloze 4 řekněte pouze, že odchylka rovin v $\mathcal{E}_3$ se nejlépe spočítá jako odchylka jejich normál. 5. úloha zůstane asi na další cvičení. Ukažte viditelnost pouze některých stěn, např. ABC je vidět, BCD není vidět.

Příklad. 1. V $\mathcal{E}_3$ spočítejte vzdálenost bodu $A = [3, 5, 7]$ od roviny

$$\rho: \; x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4 = 0.$$

Současně najděte bod $C \in \rho$ takový, že $\operatorname{dist}(A, C) = \operatorname{dist}(A, \rho)$.

Příklad. 2. V $\mathcal{E}_3$ spočítejte vzdálenost přímek

$$p: \; [4, 4, 4] + a(2, 1, -1) \quad \text{a} \quad q: \; [1, 15, 12] + b(1, -2, 1).$$

Dále najděte body $K \in p$ a $L \in q$, v nichž se vzdálenost přímek realizuje, tj. platí $\operatorname{dist}(K, L) = \operatorname{dist}(p, q)$.

Příklad. 3. V $\mathcal{E}_3$ určete odchylku roviny ρ od přímky p:

$$\rho: \; [1, 3, 5] + a(1, 1, 1) + b(1, 3, 2), \quad p: \; [-3, 1, 7] + c(1, 0, -1).$$

Příklad. 4. V $\mathcal{E}_3$ určete odchylku rovin ρ a σ:

$$\rho: \; [2, 3, 4] + a(2, 2, 1) + b(3, 3, -2), \quad \sigma: \; x_1 - 2x_2 + x_3 = 4.$$

Příklad. 5. Zjistěte, které stěny čtyřstěnu $ABCD$, kde $A = [1, 2, 3]$, $B = [4, 7, 8]$, $C = [-1, -2, 3]$, $D = [3, 0, 1]$, jsou vidět z bodu bodu $X = [-10, 100, -50]$.

Řešení. Pomocí znamének determinantů. Není vidět pouze stěna BCD. □

Další úlohy na procvičení

Příklad. 6. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, kde $A = [1, 2, 3]$, $B = [4, 7, 8]$, $C = [-1, -2, 3]$, $D = [3, 0, 1]$. Určete objem čtyřstěnu, obsah trojúhelníka ABC a velikost výšky na stěnu ABC.

Řešení. Objem pomocí determinantu. Obsah trojúhelníka pomocí vektorového součinu. Výšku ze vzorce pro objem pomocí obsahu základny. □

Příklad. 7. V $\mathcal{E}_4$ určete vzdálenost přímky p od roviny ρ

$$p: \; [5, 4, 4, 5] + r(0, 0, 1, -4), \quad \rho: \; [4, 1, 1, 0] + s(1, -1, 0, 0) + t(2, 0, -1, 0)$$

a body $M \in p$ a $N \in \rho$, v nichž se tato vzdálenost realizuje, tj. $\operatorname{dist}(M, N) = \operatorname{dist}(p, \rho)$.