10. cvičení z MB141, jaro 2021

Tentokrát toho není moc. Důležité je především praktické zvládnutí Eukleidova algoritmu a výpočtu koeficientů podle Bezoutovy věty.

Příklad. 1. Dokažte, že pro libovolná celá čísla a platí:

(1) a^2 má po dělení 4 zbytek 0 nebo 1.
(2) a^2 má po dělení 8 zbytek 0, 1 nebo 4.
(3) a^4 má po dělení 16 zbytek 0 nebo 1.

Příklad. 2. Jaké jsou poslední dvě cifry čísel: 4^{81}, 7^{14}, 3^{59}?

Příklad. 3. Najděte největšího společného dělitele čísel

(a) 227, 133,
(b) 3441, 2665.

Příklad. 4. Nalezněte celá čísla x a y tak, aby $883x + 487y = d$ byl největší společný dělitel čísel 883 a 487. Spočtěte x a y i pro dvojice čísel z předchozíhom příkladu.

Příklad. 5. Najděte všechna přirozená n taková, že $n - 1 \mid n^3 + 1$.

Příklad. 6. Dokažte, že pro přirozená čísla a, k a n platí: jestliže $k \mid n$, pak $a^k - 1 \mid a^n - 1$. Pomocí toho dokažte: Je-li $2^n - 1$ prvočíslo, pak n musí být také prvočíslo. Proto se “největší” prvočísla hledají ve tvaru $2^p - 1$, kde p je prvočíslo.

Příklad. 7. Dokažte, že $25 \mid 4^{2n+1} - 10n - 4$.