MB141 – 2. přednáška
Soustavy lineárních rovnic
a počítání s maticemi

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2021

Osnova přednášky

- Soustavy lineárních rovnic
- Gaussova eliminace
- Operace s maticemi

Soustava lineárních rovnic

Naším cílem bude řešit soustavy lineárních rovnic. Pro zadaná čísla a_{ij} a b_i hledáme čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která splňují rovnice

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \ldots & + & a_{kn}x_n & = & b_k \end{array}$$

To je soustava k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soustava lineárních rovnic

Naším cílem bude řešit soustavy lineárních rovnic. Pro zadaná čísla a_{ij} a b_i hledáme čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, která splňují rovnice

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\
a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \dots & + & a_{kn}x_n & = & b_k
\end{array}$$

To je soustava k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$.

- Říkáme, že dvě soustavy jsou ekvivalentní, jestliže mají stejnou množinu řešení.
- Postup řešení – přechod od zadané soustavy k ekvivalentní soustavě, kterou již umíme vyřešit.
- Provádíme pomocí tzv. elementárních úprav.

Rozšířená matice soustavy

Elementární úpravy jsou

- záměna pořadí dvou rovnic,
- vynásobení rovnice nenulovým číslem,
- k dané rovnici přičteme c-násobek jiné rovnice.

Rozšířená matice soustavy

Elementární úpravy jsou

- záměna pořadí dvou rovnic,
- vynásobení rovnice nenulovým číslem,
- k dané rovnici přičteme c-násobek jiné rovnice.

K provádění těchto úprav nemusíme psát rovnice. Stačí, když budeme zaznamenávat koeficienty u neznámých a koeficienty pravé strany. K tomu použijeme tzv. rozšířenou matici soustavy.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right) = (A|b)$$

Její levá část, matice A, se nazývá matice soustavy.

Elementárním úpravám soustavy rovnic pak odpovídají následující elementární řádkové operace s rozšířenou maticí soustavy.

- záměna dvou řádků matice,
- vynásobení řádku nenulovým číslem,
- k danému řádku přičteme c-násobek jiného řádku.

Které soustavy lze jednoduše vyřešit? jsou to ty, jejichž rozšířená matice soustavy je v tzv. schodovitém tvaru. Příkladem je následující matice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

popisující soustavu o neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Příklad soustavy s maticí schodovitého tvaru

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

V třetí rovnici zvolíme x_5 za parametr a spočítáme x_4:

$$x_5 = p, \quad x_4 = 1 - 2p.$$

Z druhé rovnice spočítáme

$$x_3 = -p - 2(1 - 2p) = 3p - 2.$$

V prvé rovnici zvolíme x_2 za parametr a spočítáme x_1:

$$x_2 = s, \quad x_1 = \frac{1}{2}(3 - 2s + 2(3p - 2) - (1 - 2p) - p) = \frac{7}{2}p - s - 1$$

Řešením příslušné sosutavy jsou tedy všechny pětice

$$\left[\frac{7}{2}p - s - 1, s, 3p - 2, 1 - 2p, p\right], \text{ kde } p, s \in \mathbb{R}.$$

Schodovitý tvar matice

První nenulové číslo v řádku matice se nazývý pivot nebo také vedoucí koeficient toho to řádku.

Matice $A = (a_{ij})$ je ve schodovitém tvaru, jestliže:

- Její nulové řádky, pokud nějaké má, jsou dole.
- Je-li a_{ij} pivot i-tého řádku, pak $(i+1)$-ní řádek je buď nulový nebo jeho pivot $a_{i+1,p}$ je vpravo od a_{ij}, tj. $p > j$.

Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 0\dots 0 & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & \dots & \dots & \dots & a_{1,m} \\ 0\dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,k} & \dots & \dots & \dots & a_{2,m} \\ 0\dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{3,p} & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky.

Algoritmus – Gaussova eliminace

Věta

Nenulovou matici s prvky v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Q}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na schodovitý tvar.

(1) Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.

(2) Pro $i = 2, \ldots,$ vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.

(3) Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

(4) Ze schodovitého tvaru vidíme, zda je soustava řešitelná. Pokud ano, umíme popsat množinu všech řešení.

Gaussova eliminace na příkladě

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & & - & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Gaussova eliminace na příkladě

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & & - & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Matici soustavy upravíme pomocí Gaussovy eliminace na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odtud dostaneme řešení

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \left[\frac{4}{5} - \frac{12}{5}q + \frac{4}{5}p,\ -\frac{6}{5} + \frac{8}{5}q - \frac{1}{5}p,\ q,\ p\right]$$

Ještě jednou s jinou pravou stranou

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & 3x_2 & + & & - & x_4 & = & \color{red}{1} \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2
\end{array}$$

Ještě jednou s jinou pravou stranou

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Matici soustavy upravíme stejnými úpravami jako v předchozím případě na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Poslední řádek vede na rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 3$, která evidentně nemá řešení. Tedy ani původní soustava nemá řešení (množina řešení je prázdná).

Další příklad

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Další příklad

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení $[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1)$.

Další příklad

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení $[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1)$.

Množina řešení soustavy (nad nekonečným polem $\mathbb{K}$) je: jednoprvková, prázdná nebo nekonečná.
Pro homogenní soustavy (pravé strany nulové) je množina řešení jednoprvková nebo nekonečná.

Operace s maticemi

Násobení matic

Příklady

Další příklady

Maticový zápis systémů lineárních rovnic

- Soustava

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

Maticový zápis systému lineárních rovnic

- Soustava

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

- Zápis pomocí násobení matic:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Maticový zápis systémů lineárních rovnic

- Soustava

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

- Zápis pomocí násobení matic:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Stručně píšeme $A \cdot x = b$, kde $x \in \mathbb{K}^3$, $b \in \mathbb{K}^3$ (sloupce).

Maticový zápis systémů lineárních rovnic

- Soustava

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3
\end{array}
$$

- Zápis pomocí násobení matic:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}
$$

- Stručně píšeme $A \cdot x = b$, kde $x \in \mathbb{K}^3$, $b \in \mathbb{K}^3$ (sloupce).
- Obecně $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$ a tedy $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$.
  Přesněji $x \in Mat_{n,1}(\mathbb{K})$ a $b \in Mat_{m,1}(\mathbb{K})$.

Maticový zápis systémů lineárních rovnic

- Soustava

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

- Zápis pomocí násobení matic:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Stručně píšeme $A \cdot x = b$, kde $x \in \mathbb{K}^3$, $b \in \mathbb{K}^3$ (sloupce).
- Obecně $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$ a tedy $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$. Přesněji $x \in Mat_{n,1}(\mathbb{K})$ a $b \in Mat_{m,1}(\mathbb{K})$.
- A matice soustavy, $(A \mid b)$ rozšířená matice soustavy.

Postup – elementární řádkové úpravy

- Dvě soustavy (rozšířené matice) jsou ekvivalentní, pokud mají stejná řešení.

Postup – elementární řádkové úpravy

- Dvě soustavy (rozšířené matice) jsou ekvivalentní, pokud mají stejná řešení.
- Postup – převod soustavy na ekvivalentní jednodušší soustavu.
- Realizace – pomocí elementárních řádkových úprav.

Postup – elementární řádkové úpravy

- Dvě soustavy (rozšířené matice) jsou ekvivalentní, pokud mají stejná řešení.
- Postup – převod soustavy na ekvivalentní jednodušší soustavu.
- Realizace – pomocí elementárních řádkových úprav.

Elementární řádkové transformace:

- záměna dvou řádků;
- vynásobení vybraného řádku nenulovým skalárem (POLE);
- přičtení (násobku) řádku k jinému řádku.

Systematicky můžeme použít elementární řádkové úpravy k postupné eliminaci proměnných. Postup je algoritmický a většinou se mu říká Gaussova eliminace proměnných.

Schodovitý tvar matice

Věta

Nenulovou matici nad libovolným polem skalárů $\mathbb{K}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) schodovitý tvar:

- *Je-li $a_{i1} = \cdots = a_{ij} = 0$, potom $a_{kj} = 0$ pro všechna $k \geq i$.*
- *Je-li $a_{i-1,j}$ první nenulový prvek na $(i-1)$-tém řádku, tzv. pivot, pak $a_{ij} = 0$.*

Schodovitý tvar matice

Věta

Nenulovou matici nad libovolným polem skalárů $\mathbb{K}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) schodovitý tvar:

- *Je-li $a_{i1} = \cdots = a_{ij} = 0$, potom $a_{kj} = 0$ pro všechna $k \geq i$.*
- *Je-li $a_{i-1,j}$ první nenulový prvek na $(i-1)$-tém řádku, tzv. pivot, pak $a_{ij} = 0$.*

Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 0\dots 0 & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & \dots & \dots & \dots & a_{1,m} \\ 0\dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,k} & \dots & \dots & \dots & a_{2,m} \\ 0\dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{3,p} & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky.

Příklad

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\left(\begin{array}{ccccr|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení $[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1)$.

Příklad

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

▶▶

Řešení $[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1)$.

Množina řešení soustavy (nad nekonečným polem $\mathbb{K}$) je: jednoprvková, prázdná nebo nekonečná.
Pro homogenní soustavy (pravé strany nulové) je množina řešení jednoprvková nebo nekonečná.

Algoritmus – Gaussova eliminace

Algoritmus pro řešení systémů lineárních rovnic:

1. Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.
2. Pro $i = 2, \ldots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.
3. Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.
4. Ze schodovitého tvaru vidíme, zda je soustava řešitelná. Pokud ano, umíme popsat množinu všech řešení.

Algoritmus – Gaussova eliminace

Algoritmus pro řešení systémů lineárních rovnic:

1. Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.
2. Pro $i = 2, \ldots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.
3. Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.
4. Ze schodovitého tvaru vidíme, zda je soustava řešitelná. Pokud ano, umíme popsat množinu všech řešení.

Algoritmus lze dále dokončit i tak, že matici vyeliminujeme do tzv. redukovaného schodovitého tvaru, kde pivot je jediný nenulový prvek v příslušném sloupci.
(Mluvíme o zpětné eliminaci.)

Inverzní matice

Definice

Říkáme, že B je matice inverzní ke čtvercové matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Píšeme pak $B = A^{-1}$, přičemž B je čtvercová matice stejného rozměru n. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme invertibilní matice.

Inverzní matice

Definice

Říkáme, že B je matice inverzní ke čtvercové matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Píšeme pak $B = A^{-1}$, přičemž B je čtvercová matice stejného rozměru n. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme invertibilní matice.

Pokud řešíme soustavu $A \cdot x = b$ s invertibilní maticí A, pak $x = A^{-1} \cdot b$ je jediné řešení soustavy.

Inverzní matice

Definice

Říkáme, že B je matice inverzní ke čtvercové matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Píšeme pak $B = A^{-1}$, přičemž B je čtvercová matice stejného rozměru n. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme invertibilní matice.

Pokud řešíme soustavu $A \cdot x = b$ s invertibilní maticí A, pak $x = A^{-1} \cdot b$ je jediné řešení soustavy.

Postup výpočtu inverzní matice: snažme se určit matici X splňující $A \cdot X = E$ postupně po sloupcích.

Definice

Říkáme, že B je matice inverzní ke čtvercové matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Píšeme pak $B = A^{-1}$, přičemž B je čtvercová matice stejného rozměru n. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme invertibilní matice.

Pokud řešíme soustavu $A \cdot x = b$ s invertibilní maticí A, pak $x = A^{-1} \cdot b$ je jediné řešení soustavy.

Postup výpočtu inverzní matice: snažme se určit matici X splňující $A \cdot X = E$ postupně po sloupcích.
První sloupec je řešením následujícího systému:

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Inverzní matice

Definice

Říkáme, že B je matice inverzní ke čtvercové matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Píšeme pak $B = A^{-1}$, přičemž B je čtvercová matice stejného rozměru n. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme invertibilní matice.

Pokud řešíme soustavu $A \cdot x = b$ s invertibilní maticí A, pak $x = A^{-1} \cdot b$ je jediné řešení soustavy.

Postup výpočtu inverzní matice: snažme se určit matici X splňující $A \cdot X = E$ postupně po sloupcích.
První sloupec je řešením následujícího systému:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \quad \dots \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} \end{array}\right).$$

Algoritmus pro nalezení inverzní matice

1. Vedle sebe napíšeme původní matici A a jednotkovou matici E.
2. Matici A upravujeme řádkovými elementárními úpravami nejprve na schodovitý tvar.
3. Následně zpětnou eliminací na diagonální matici.
4. V té násobíme řádky inverzními prvky z $\mathbb{K}$, abychom dostali jednotkovou matici E.
5. Tytéž úpravy souběžně prováděné s vedle napsanou maticí E vedou k hledané inverzní matici A^{-1}.
6. Pokud tento algoritmus narazí na vynulování celého řádku v původní matici, znamená to, že matice inverzní neexistuje.

Determinant – osnova

- Motivace – objem.

Determinant – osnova

- Motivace – objem.
- Obecná definice $|A|$ (pro čtvercovou matici A).

Determinant – osnova

- Motivace – objem.
- Obecná definice $|A|$ (pro čtvercovou matici A).
- Determinant a elementární řádkové úpravy.

Determinant – osnova

- Motivace – objem.
- Obecná definice $|A|$ (pro čtvercovou matici A).
- Determinant a elementární řádkové úpravy.
- Souvislost determinantu s maticí A^{-1}.

Determinant – osnova

- Motivace – objem.
- Obecná definice $|A|$ (pro čtvercovou matici A).
- Determinant a elementární řádkové úpravy.
- Souvislost determinantu s maticí A^{-1}.
- Použití pro přímý výpočet řešení soustavy.
- Výpočet determinantu.
- Determinant a součin matic – $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

- Pro matici
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
platí $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Determinant – matice typu 2×2, 3×3

- Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

platí $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

definujeme $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Determinant – matice typu 2×2, 3×3

- Pro matici
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
platí $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- Pro matici
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
definujeme $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

- Pozor, pro větší rozměr nelze počítat takto „úhlopříčně“. Ani případy $n = 2$ a $n = 3$ nejsou aplikací stejného „úhlopříčného principu“.

Determinant – definice

Definice

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n nad polem $\mathbb{K}$.
Determinant matice $|A|$ je prvek z $\mathbb{K}$ definovaný předpisem:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Zde S_n je množina všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.
A $\mathrm{sgn}(\sigma)$ je parita permutace σ (přičemž $\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1$).

Pozn.: Formální definice parity – učebnice [MB201].

Determinant – definice

Definice

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n nad polem $\mathbb{K}$.
Determinant matice $|A|$ je prvek z $\mathbb{K}$ definovaný předpisem:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Zde S_n je množina všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.
A $\operatorname{sgn}(\sigma)$ je parita permutace σ (přičemž $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$).

Pozn.: Formální definice parity – učebnice [MB201].

Výpočet $|A|$ z definice není efektivní. Naučíme se jinak.

Determinant – základní poznatky

- Pro jednotkovou matici máme $|E| = 1$.

Determinant – základní poznatky

- Pro jednotkovou matici máme $|E| = 1$.
- Speciální vzorce $n = 2$, $n = 3$.

Determinant – základní poznatky

- Pro jednotkovou matici máme $|E| = 1$.
- Speciální vzorce $n = 2$, $n = 3$.
- Pokud A obsahuje nulový řádek, pak $|A| = 0$.

Determinant – základní poznatky

- Pro jednotkovou matici máme $|E| = 1$.
- Speciální vzorce $n = 2$, $n = 3$.
- Pokud A obsahuje nulový řádek, pak $|A| = 0$.
- Horní trojúhelníková matice – součin prvků na diagonále.

Determinant – základní poznatky

- Pro jednotkovou matici máme $|E| = 1$.
- Speciální vzorce $n = 2$, $n = 3$.
- Pokud A obsahuje nulový řádek, pak $|A| = 0$.
- Horní trojúhelníková matice – součin prvků na diagonále.
- Pro transponovanou matici $A^\top$ platí $|A^\top| = |A|$.

Determinant a elementární řádkové úpravy

- Vznikne-li matice B přehozením dvou řádků čtvercové matice A, pak $|B| = -|A|$.

Determinant a elementární řádkové úpravy

- Vznikne-li matice B přehozením dvou řádků čtvercové matice A, pak $|B| = -|A|$.
- Vznikne-li matice B vynásobením některého řádku čtvercové matice A konstantou c, pak $|B| = c \cdot |A|$.

Determinant a elementární řádkové úpravy

- Vznikne-li matice B přehozením dvou řádků čtvercové matice A, pak $|B| = -|A|$.
- Vznikne-li matice B vynásobením některého řádku čtvercové matice A konstantou c, pak $|B| = c \cdot |A|$.
- Vznikne-li matice B z čtvercové matice A přičtením násobku některého řádku k jinému řádku, pak $|B| = |A|$.

Determinant a elementární řádkové úpravy

- Vznikne-li matice B přehozením dvou řádků čtvercové matice A, pak $|B| = -|A|$.
- Vznikne-li matice B vynásobením některého řádku čtvercové matice A konstantou c, pak $|B| = c \cdot |A|$.
- Vznikne-li matice B z čtvercové matice A přičtením násobku některého řádku k jinému řádku, pak $|B| = |A|$.

[Důkazy MB201]

Determinant a elementární řádkové úpravy

- Vznikne-li matice B přehozením dvou řádků čtvercové matice A, pak $|B| = -|A|$.
- Vznikne-li matice B vynásobením některého řádku čtvercové matice A konstantou c, pak $|B| = c \cdot |A|$.
- Vznikne-li matice B z čtvercové matice A přičtením násobku některého řádku k jinému řádku, pak $|B| = |A|$.

[Důkazy MB201]

Metoda výpočtu determinantu pomocí Gaussovy eliminace.

Determinant a elementární řádkové úpravy

- Vznikne-li matice B přehozením dvou řádků čtvercové matice A, pak $|B| = -|A|$.
- Vznikne-li matice B vynásobením některého řádku čtvercové matice A konstantou c, pak $|B| = c \cdot |A|$.
- Vznikne-li matice B z čtvercové matice A přičtením násobku některého řádku k jinému řádku, pak $|B| = |A|$.

[Důkazy MB201]

Metoda výpočtu determinantu pomocí Gaussovy eliminace.

Věta

Pro čtvercovou matici A je ekvivalentní:

- *soustava $A \cdot x = b$ má jediné řešení,*
- $|A| \neq 0$,
- *existuje A^{-1}.*

Determinant – příklad výpočtu

Příklad

Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinant – příklad výpočtu

Příklad

Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

▶▶

Příklad

Určete determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Příklad

Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad

Určete determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Sami (viz dú). Výsledek $|B| = 12$.

Výpočet determinantu – Laplaceův rozvoj

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Pro zvolené indexy i, j označme A_{ij} čtvercovou matici řádu $n - 1$, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak prvek

$$\widehat{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

nazýváme algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A.

Věta (Laplaceův rozvoj)

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak pro libovolný index i platí

$$|A| = a_{i1}\widehat{A_{i1}} + a_{i2}\widehat{A_{i2}} + \cdots + a_{in}\widehat{A_{in}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widehat{A_{ij}}\,.$$

Hovoříme o rozvoji podle i-tého řádku.

Příklad

Určete determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$|B| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (8 - 14) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-2) = 12\,.$$

Příklad

Určete determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$|B| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (8 - 14) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-2) = 12\,.$$

Všiměme si, že

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Inverze pomocí adjungované matice – MB201

- Laplaceův rozvoj pomocí sloupce — důkaz transponováním.

- Laplaceův rozvoj pomocí sloupce — důkaz transponováním.
- Definujeme $\widehat{A} = (\widehat{A_{ij}})$ matici řádu n složenou z algebraických doplňků. K ní transponovanou matici $A^* = \widehat{A}^\top$ nazýváme adjungovanou maticí k matici A.

- Laplaceův rozvoj pomocí sloupce — důkaz transponováním.
- Definujeme $\widehat{A} = (\widehat{A_{ij}})$ matici řádu n složenou z algebraických doplňků. K ní transponovanou matici $A^* = \widehat{A}^\top$ nazýváme adjungovanou maticí k matici A.
- $A \cdot A^* = |A| \cdot E$. [MB201]

Inverze pomocí adjungované matice – MB201

- Laplaceův rozvoj pomocí sloupce — důkaz transponováním.
- Definujeme $\widehat{A} = (\widehat{A_{ij}})$ matici řádu n složenou z algebraických doplňků. K ní transponovanou matici $A^* = \widehat{A}^\top$ nazýváme adjungovanou maticí k matici A.
- $A \cdot A^* = |A| \cdot E$. [MB201]
- Proto A^{-1} existuje právě tehdy, když $|A| \neq 0$. (Už víme.)

Věta

Buď A čtvercová matice řádu $n > 1$ taková, že $|A| \neq 0$. Pak

$$A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^* .$$

- Laplaceův rozvoj pomocí sloupce — důkaz transponováním.
- Definujeme $\widehat{A} = (\widehat{A_{ij}})$ matici řádu n složenou z algebraických doplňků. K ní transponovanou matici $A^* = \widehat{A}^\top$ nazýváme adjungovanou maticí k matici A.
- $A \cdot A^* = |A| \cdot E$. [MB201]
- Proto A^{-1} existuje právě tehdy, když $|A| \neq 0$. (Už víme.)

Věta

Buď A čtvercová matice řádu $n > 1$ taková, že $|A| \neq 0$. Pak

$$A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^* .$$

- Praktické použití je diskutabilní. Pro výpočet determinantů $|A_{ij}|$ je zapotřebí stejně eliminovat.

Cramerovo pravidlo

Řešíme rovnici $Ax = b$, kde A je čtvercová matice, $|A| \neq 0$.

- $|A| \neq 0$ implikuje jednoznačnost řešení.

Cramerovo pravidlo

Řešíme rovnici $Ax = b$, kde A je čtvercová matice, $|A| \neq 0$.

- $|A| \neq 0$ implikuje jednoznačnost řešení.
- $|A| \neq 0$ implikuje existenci A^{-1}.

Cramerovo pravidlo

Řešíme rovnici $Ax = b$, kde A je čtvercová matice, $|A| \neq 0$.

- $|A| \neq 0$ implikuje jednoznačnost řešení.
- $|A| \neq 0$ implikuje existenci A^{-1}.
- Odtud $x = A^{-1}b$, kde $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.

Cramerovo pravidlo

Řešíme rovnici $Ax = b$, kde A je čtvercová matice, $|A| \neq 0$.

- $|A| \neq 0$ implikuje jednoznačnost řešení.
- $|A| \neq 0$ implikuje existenci A^{-1}.
- Odtud $x = A^{-1}b$, kde $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.

Věta

Buď A čtvercová matice řádu $n > 1$ taková, že $|A| \neq 0$. Pak soustava $Ax = b$ má jediné řešení $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$, kde

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|},$$

přičemž A_j je matice vzniklá z matice A nahrazením jejího j-tého sloupce sloupcem b.

Cramerovo pravidlo – příklad

Příklad (Motivační příklad)

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

Cramerovo pravidlo – příklad

Příklad (Motivační příklad)

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{9} = 1,$$

Cramerovo pravidlo – příklad

Příklad (Motivační příklad)

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{9} = 1, \quad x_2, x_3 \ – \text{ sami.}$$

Cauchyova věta

Věta

Pro libovolné dvě čtvercové matice A a B stejného řádu platí

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Cauchyova věta

Věta

Pro libovolné dvě čtvercové matice A a B stejného řádu platí

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Důsledek: $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Cauchyova věta

Věta

Pro libovolné dvě čtvercové matice A a B stejného řádu platí

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Důsledek: $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Důkaz – [MB201]

Požadavky

- Vyřešit zadaný systém lineárních rovnic.
- Spočítat inverzní matici (dle algoritmu).
- Spočítat determinant matic (i matic s parametrem). Ovládat obě metody a umět je kombinovat.
- Znát základní vlastnosti determinantů (Cauchyova věta).
- Znalost adjungované matice a Cramerovo pravidlo se nezkouší.

Domácí úloha

Příklad (6.1)

Nalezněte všechny symetrické matice A rozměru 3×3 s jedničkami na diagonále, pro které platí $A \cdot (1,1,1)^T = (1,2,3)^T$.

Příklad (6.2)

Řešte následující soustavu lineárních rovnic v $\mathbb{R}$, kde x_1, x_2, x_3 jsou neznámé a a a b jsou parametry. Tzn. určete, pro které hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$ má soustava řešení, a pro tato a, b popište množinu všech řešení dané soustavy.

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & +ax_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +bx_3 & = & -1 \\ x_1 & +2x_2 & & = & 1 \end{array}$$

Domácí úloha

Příklad (6.3)

Určete inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Příklad (6.4)

Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Doplňující domácí úloha – MB201

Příklad (6.5)

Pro libovolnou elementární úpravu nalezněte matici, která ji realizuje pomocí násobení. Tj. pokud $A \sim B$ je jedna úprava, pak existuje matice U taková, že $B = U \cdot A$.

Příklad (6.6)

Nechť a a b jsou dvě různá reálná čísla a n je kladné celé číslo. Určete determinant matice n/n, která má všechny prvky pod hlavní diagonálou rovny b a všechny prvky na a nad hlavní diagonálou rovny a.