MB141 – 4. přednáška
Vektorové prostory, báze, dimenze

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2021

Osnova přednášky

- Vektorové prostory
- Výběr vhodné generující množiny
- Báze a dimenze podprostorů
- Průnik a součet podprostorů

Motivace

- Vektory – sčítání, násobky.
- Uvažujme systém m lineárních rovnic pro n proměnných a předpokládejme, že jde o soustavu tvaru $A \cdot x = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  - Součet dvou řešení $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$ splňuje
$$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0$$
a je tedy také řešením.
  - Stejně tak zůstává řešením i skalární násobek $a \cdot x$.
  - Máme tedy podmnožinu $\mathbb{K}^n$ sestávající ze všech řešení soustavy $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\}$ se sčítáním a násobky.

Vektorové prostory

Nechť $\mathbb{K}$ je množina reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo racionálních čísel $\mathbb{Q}$ nebo komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Definice

Vektorový prostor V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je neprázdná množina s operacemi sčítání vektorů $+ : V \times V \to V$ a násobení vektoru skalárem $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, pro které platí

$$(u + v) + w = u + (v + w) \tag{1}$$

$$u + v = v + u \tag{2}$$

$$\exists\, 0 \in V : \quad u + 0 = u \tag{3}$$

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{4}$$

$$\forall u \in V\ \exists (-u) \in V : \quad u + (-u) = 0 \tag{5}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{6}$$

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{7}$$

$$1 \cdot v = v \tag{8}$$

Vektorové prostory – příklady

Rozumné (známé) příklady:

- Vektory v rovině: $\mathbb{R}^2$.
- Prostory vyšší dimenze: $\mathbb{R}^n$.
- Matice nad polem: $Mat_{n,m}(\mathbb{R})$.
- Polynomy omezeného stupně:

  $$\mathbb{R}_4[x] = \{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

  Obecně $\mathbb{R}_n[x]$.
- Množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.
- $\mathbb{C}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Všechno to jsou reálné vektorové prostory, tj. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Lze uvažovat i příklady $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Q}_n[x]$, kde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ či $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Vektorové prostory – příklady II

Poněkud složitější příklady:

- Polynomy: $\mathbb{R}[x]$.
- Funkce: $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
- $\mathbb{R}$ vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$.

Poslední dva jsou trochu divoké.

Příklady množin, které netvoří vektorový prostor.

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nad $\mathbb{R}$.
- $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = b\}$, pro b nenulové.
- Čtvercové matice s determinantem 1.
- Polynomy stupně n.

Vektorové prostory – další vlastnosti

Věta

Nechť V *je vektorový prostor nad polem skalárů* $\mathbb{K}$*, dále uvažme skaláry* $a, b, a_i \in \mathbb{K}$ *a vektory* $u, v, u_j \in V$*. Potom*

- $a \cdot u = 0$ *právě když* $a = 0$ *nebo* $u = 0$*,*
- $(-1) \cdot u = -u$*,*
- $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$*,*
- $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$*,*
- $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot u_j$.

Výběr optimálních základních vektorů

- Cíl: najít (co nejmenší) základní množinu vektorů, abychom mohli pomocí nich ostatní vektory (jednoznačně) vyjádřit.

Definice

- Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_k \in V$ (zde $a_i \in \mathbb{K}$ skaláry).
- Množina vektorů $M = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineárně nezávislá, jestliže pro každou k-tici skalárů $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

- M je lineárně závislá, jestliže není lineárně nezávislá.

- M je závislá, právě když aspoň jeden z jejích vektorů je vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních.

Odstraňování přebytečných vektorů

Základní množina vektorů, aby byla co nejmenší, musí být lineárně nezávislá. Jak to poznáme?

Příklad

Rozhodněte, zda jsou vektory $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$ a $v_3 = (1, 2, 3)$ lineárně nezávislé (v reálném prostoru $\mathbb{R}^3$).

Soustava $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$ s maticí

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

má řešení $x_1 = -2t, x_2 = -t, x_3 = t$. Např. pro $t = 1$ dostaneme $-2 \cdot v_1 - v_2 + v_3 = 0$, tzn. $v_3 = 2 \cdot v_1 + v_2$.
Zkouška: $2v_1 + v_2 = (2, 2, 2) + (-1, 0, 1) = (1, 2, 3) = v_3$.
Odpověď: zadané vektory jsou lineárně závislé.

Odstraňování přebytečných vektorů II

Příklad

Rozhodněte, zda jsou vektory $x^3 - x + 1$, $2x^3 + x^2 - 2x$, $x^4 + x^3 - x$ a $x^4 - x^2 + 1$ lineárně nezávislé.

$$
\begin{array}{c}
x^4: \\ x^3: \\ x^2: \\ x^1: \\ x^0:
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

Odpověď: jsou lineárně závislé.

Postup (obecně): vektory dáme do (sloupců) matice a řešíme příslušnou homogenní rovnici.

Podprostory

Umíme se zbavovat přebytečných vektorů z potencionální základní množiny. Máme jich ale dost? Tj. stačí na vyjádření všech vektorů? K tomu definujeme další užitečný pojem.

Definice

Podmnožina $\emptyset \neq U \subseteq V$ se nazývá vektorovým podprostorem, jestliže, spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry, je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme, aby platilo

$$\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in U,\ a \cdot v + b \cdot w \in U.$$

Příklady:

- $\mathbb{R}_n[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$.
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$.
- Sudé polynomy $\{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(x) = f(-x)\} \subseteq \mathbb{R}_4[x]\}$.

Lineární obal množiny vektorů

Říkáme, že vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ generují vektorový prostor, jestliže každý vektor $u \in V$ je nějakou jejich lineární kombinací, tj. existují $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, že

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Lineární kombinace vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nemusí dávat všechny vektory ve V. Nicméně tvoří vždy nějaký jeho podprostor. Říkáme mu lineární obal těchto vektorů.

Definice

Lineární obal vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je množina

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] = \{a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k \mid a_i \in \mathbb{K}\}.$$

Báze vektorového prostoru

Definice

- Vektorový prostor, který je generován konečnou množinou vektorů se nazývá konečněrozměrný.
- Nechť V je konečněrozměrný vektorový prostor. Vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ tvoří bázi vektorového prostoru V, jestliže generují V a jsou lineárně nezávislé.
- Počet prvků báze nazýváme dimenzí prostoru V. Značíme $\dim V$.

Triviální podprostor $\{0\}$ je generován prázdnou množinou, která je "prázdnou" bází. Má tedy nulovou dimenzi.
Je-li $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ báze, pak libovolný vektor $v \in V$ lze jediným způsobem zapsat jako lineární kombinaci vektorů báze

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n.$$

Koeficienty $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazýváme souřadnice vektoru v v dané bázi.

Báze – příklady

- $\mathbb{R}^2$: báze $((1,0),(0,1))$; dimenze 2.
- $\mathbb{R}^n$: báze $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, kde $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$; dimenze n.
- $Mat_{n,m}(\mathbb{R})$: dimenze nm.

  $$Mat_{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right) \mid a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\} =$$
  $$\left\{ a \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + b \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + c \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + d \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \right.$$
  $$\left. + e \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + f \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Báze je $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right)$.
- $\mathbb{R}_4[x]$: báze $(x^4, x^3, x^2, x, 1)$; dimenze 5.
  ($\mathbb{R}_4[x] = \{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_4, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\}$)
- $[(1,1,1),(-1,0,1),(1,2,3)] = [(1,1,1),(-1,0,1)]$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$ dimenze 2. (Příklad z 9. slajdu.)
- $\mathbb{R}[x]$: není konečněrozměrný.

Báze – základní poznatky

Věta

Pro konečněrozměrný vektorový prostor V platí:

- *Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi.*
- *Všechny báze V mají stejný počet vektorů.*
- *Předchozí defince dimenze je korektní.*

Příklad

Nechť $M = \{(1,0,2,0,1),(0,2,1,-1,1),(2,-4,2,2,0),(2,1,3,1,1),(0,1,0,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^5$. Z množiny M vyberte bázi lineárního obalu M (tj. podprostoru $V = [M] \subseteq \mathbb{R}^5$).

Příklad – výběr báze z generující množiny

- $v_1 = (1, 0, 2, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, -1, 1)$, $v_3 = (2, -4, 2, 2, 0)$, $v_4 = (2, 1, 3, 1, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 0, 0)$.
- Postup již známe – odstraňování přebytečných vektorů.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- v_3 lze vyjádřit pomocí v_1 a v_2; v_5 pomocí v_1, v_2, v_4.
- Báze (v_1, v_2, v_4).

Báze – další poznatky

Je-li V konečněrozměrný, je vhodné si pamatovat:

- Z každé množiny generátorů, lze vybrat bázi.
- Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě minimální množiny generátorů.
- Každou lineárně nezávislou množinu lze doplnit do báze.
- Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny.

Důsledek:

Věta

Pro libovolný konečněrozměrný vektorový prostor V a jeho podprostor U platí:

$$\dim U \leq \dim V.$$

- Pro přirozená čísla $m > n$ je libovolná množina m vektorů v prostoru dimenze n (např. $\mathbb{R}^n$) lineárně závislá.

Báze – příklad s polynomy

Příklad

Je dán vektorový prostor $V = \mathbb{R}_4[x]$. Určete bázi a dimenzi podprostorů P, Q, $P \cap Q$, kde

$$P = \{ f \in \mathbb{R}_4[x] \mid (\forall c \in \mathbb{R})(f(c) = f(-c)) \} ,$$

$$Q = [x^3 - x + 1,\ 2x^3 + x^2 - 2x,\ x^4 + x^3 - x,\ x^4 - x^2 + 1] .$$

- P má bázi $(x^4, x^2, 1)$ a dimenzi 3.
- Už jsme spočítali bázi a dimenzi Q (slajd 10): dimenze je 3 a báze $(x^3 - x + 1,\ 2x^3 + x^2 - 2x, x^4 + x^3 - x)$.
- Hledáme skaláry a, b, c, p, q, r tak, aby $ax^4 + bx^2 + c = pv_1 + qv_2 + rv_3$.
- To vede na řešení následující soustavy.

Báze – příklad s polynomy – pokračování

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Řešení: q, r volné proměnné, $p = -r - 2q$.
- V průniku jsou tedy vektory tvaru

$$(-r - 2q) \cdot (x^3 - x + 1) + q \cdot (2x^3 + x^2 - 2x) + r \cdot (x^4 + x^3 - x)$$
$$= q \cdot (x^2 - 2) + r \cdot (x^4 - 1)\,.$$

- Proto $P \cap Q$ má bázi $(x^2 - 2, x^4 - 1)$ a dimenzi 2.

Průnik a součet podprostorů

Nechť U a W, jsou podprostory ve V, $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v \in U \cap W$. Pak $a \cdot u + b \cdot v \in U \cap V$. Průnik podprostorů je opět podprostor.

Sjednocení podprostorů není obecně podprostor. Místo sjednocení proto definujeme součet podprostorů.

Definice

Součtem podprostorů $U + W$ je množina

$$U + W = \{u + w \in V|\ u \in U,\ w \in W\}.$$

Je to opět vektorový podprostor, nejmenší, který obsahuje podprostory U a W.

Příklad s polynomy – součet podprostorů

Příklad

Určete bázi a dimenzi podprostoru $P + Q$.

- Sjednotíme báze a dostaneme množinu generátorů.
- Z ní vybereme bázi $P + Q$.
- To už máme mimoděk spočítáno: báze $P + Q$ je například $(x^4, x^2, 1, x^3 - x + 1)$ a dimenze je 4.
- Platí (zkouška): $\dim P + \dim Q = \dim(P + Q) + \dim(P \cap Q)$.
- Závěr: báze i dimenze $P + Q$ a $P \cap Q$ se počítá současně.

Věta

Pro U, W podprostory v konečněrozměrném V platí

- $\dim U \leq \dim V$,
- $U = V$ *právě když* $\dim U = \dim V$,
- $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.

Požadavky

Typické příklady:

- Určit bázi a dimenzi podprostoru (užitečné dovednosti: vyběr báze ze zadané množiny generátorů, doplnění množiny vektorů na bázi).
- Průnik a součet podprostorů – opět báze a dimenze.

Domácí úloha

Příklad (4.1)

Pro každou ze zadaných podmnožin M_i vektorového prostoru $V = \mathbb{R}_2[x] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ rozhodněte, zda je vektorovým podprostorem V.

i) $M_1 = \{f \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(1) = f(2)\}$;

ii) $M_2 = \{f \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(1) = 0 \wedge \ (\forall c \in \mathbb{R})(f(c) = f(-c))\ \}$;

iii) $M_3 = \{f \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(1) = 0 \wedge f(0) = 1\}$.

Pokud M_i není vektorový podprostor, toto tvrzení zdůvodněte. Pokud M_i je vektorový podprostor, určete dimenzi a nějakou bázi tohoto podprostoru.

Příklad (4.2)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ (nad tělesem $\mathbb{R}$) jsou dány vektory $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -1, 1, 6)$, $u_3 = (0, 3, 1, -4)$ a $u_4 = (3, 1, 2, 6)$. Z množiny $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ vyberte maximální podmnožinu lineárně nezávislých vektorů a doplňte ji na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

Doplňující domácí úloha

Příklad (4.3)

Ve vektorovém prostoru $Mat_{3,3}(\mathbb{R})$ máme následující podmnožiny. Určete, které z nich jsou vektorové podprostory, a určete jejich dimenzi a bázi.

i) Podmnožina všech matic s jedničkami na diagonále.

ii) Podmnožina všech matic s nulami na diagonále.

iii) Podmnožina všech matic s nulovým determinantem.

iv) Podmnožina všech matic X pro které platí $(1,0,0) \cdot X = (1,0,0)$.

v) Podmnožina všech matic X pro které je součin $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = 0$.