MB141 – 5. přednáška
Lineární zobrazení

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2021

Osnova přednášky

- Definice lineárního zobrazení
- Matice a lineární zobrazení
- Vlastní čísla a vektory

Lineární zobrazení

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $\varphi : U \to V$ se nazývá lineární zobrazení (homomorfismus) jestliže platí:

1. $\forall u, v \in U \ : \ \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
2. $\forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in U \ : \ \varphi(a \cdot u) = a \cdot \varphi(u)$.

$\varphi(au + bv) =$
$= a\varphi(u) + b\varphi(v)$

$\varphi(\vec{o}_u) = \vec{o}_v$

$\varphi(\vec{o}) = \varphi(0 \cdot \vec{u}) =$
$0 \cdot \varphi(\vec{u}) = \vec{o}$

Podívejme se na několik zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$:

- $\varphi((x, y)) = xy$ – není lineární zobrazení.
- $\varphi((x, y)) = x^2 + 3y$ – není lineární zobrazení.
- $\varphi((x, y)) = 3x + 1$ – není lineární zobrazení.
- $\varphi((x, y)) = ax + by$ – je lineární zobrazení. Zde

$$\varphi((x, y)) = (a \quad b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$\varphi(x,y) = x \cdot y$ není lineární

$\varphi(2\cdot(x,y)) = \varphi(2x,2y) = 2x \cdot 2y = 4\cdot xy$

$\neq \quad x \neq 0,\ y \neq 0$

$2\cdot\varphi(x,y) = 2(xy) = 2xy$

$\varphi(x,y) = x^2 + 3y$

neplatí (1) $\quad u = (2,0)$

$v = (1,1)$

$\varphi(u+v) = \varphi(3,1) = 3^2 + 3\cdot 1 = 12$

$\neq$

$\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(2,0) + \varphi(1,1) = 4 + 3\cdot 0 + 1 + 3\cdot 1 =$

$= 8$

$\varphi(x,y) = 3x + 1$

$\varphi(2\cdot(x,y)) = \varphi(2x,2y) = 3\cdot(2x) + 1 = 6x + 1$

$\neq$

$2\,\varphi(x,y) = 2\cdot(3x+1) = 6x + 2$

$$\varphi(x,y) = ax + by$$

$$\varphi\left((x_1,y_1) + (x_2,y_2)\right) = \varphi(x_1+x_2,\, y_1+y_2)$$

$$= a(x_1+x_2) + b(y_1+y_2) = ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2$$

$$\varphi(x_1,y_1) + \varphi(x_2,y_2) = ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2$$

Obdobně pro násobek:

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by = (a\ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (a, b)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (a, b)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (a, b)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Příklady lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$

Následující zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do sebe jsou lineární:

$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- Prodloužení nebo zkrácení vektoru

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.

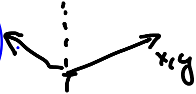
$A \cdot a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- Rotace o úhel α v kladném smyslu

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Reflexe (symetrie) podle osy y

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Obecně, každé zobrazení $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ je lineární.

Lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$

Každé zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ tvaru

$$\varphi(x) = Ax = k\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}}^{n}\right. \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

je lineární a naopak, každé lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ je tvaru $\varphi(x) = Ax$, kde A je matice $k \times n$. Odvodíme si to.

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ jsou vektory standardní báze v $\mathbb{R}^n$ a $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ jsou vektory v $\mathbb{R}^k$, které bereme jako sloupce. Z linearity zobrazení φ dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + \cdots + x_n \varphi(e_n) \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

• $A(x+y) = Ax + Ay$

• $A\cdot(ax) = a\cdot Ax$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-té místo}$$

A

$$= (\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\ \dots\ \varphi(e_n)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Z odvození je vidět, že platí

Věta

Každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno svými hodnotami na vektorech nějaké báze.

Příklad

Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ má na třech vektorech hodnoty

$$\underbrace{\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\varphi(u_1)}, \quad \underbrace{\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\varphi(u_2)}, \quad \underbrace{\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{u_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\varphi(u_3)}.$$

Najděte matici A tvaru 2×3 takovou, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^3$ je $\varphi(x) = Ax$.

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = S_1 A, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S_2 A_1 \cdots$

Sloupce matice A jsou hodnoty zobrazení φ na vektorech $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ a $e_3 = (0, 0, 1)$. Napíšeme tedy zadané vektory $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ do řádků matice a vedle nich napíšeme hodnoty $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3) \in \mathbb{R}^2$ a tuto matici upravujeme řádkovými úpravami tak, abychom na místě vektorů u_i dostali vektoru e_i. Pak na místě vektorů $\varphi(u_i)$ dostaneme vektory $\varphi(e_i)$:

ALGOR.

Úpravy díky linearitě zobrazení φ totiž fungují takto

$$\left(\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \\ v & \varphi(v) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} u+v & \varphi(u)+\varphi(v) \\ cv & c\varphi(v) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} u+v & \varphi(u+v) \\ cv & \varphi(cv) \end{array}\right)$$

Dostaneme

$\varphi(e_1) = (1,2)$

$$\left(\begin{array}{c|c} u_1 & \varphi(u_1) \\ u_2 & \varphi(u_2) \\ u_3 & \varphi(u_3) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Tedy $\varphi(e_1) = (1,2)$, $\varphi(e_2) = (0,-1)$, $\varphi(e_3) = (2,3)$, a proto

$$\frac{u_1 \; u_2 \; u_3}{\varphi(u_1)\varphi(u_2)\varphi(u_3)}$$

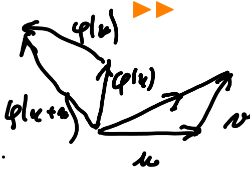
$$\varphi(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad — geometrické zobrazení

Příklad

Zobrazení φ je symetrií prostoru $\mathbb{R}^3$ podle přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $(1,1,1)$. Napište předpis tohoto zobrazení pomocí maticového násobení.

Prvně najdeme obrazy tří vhodných vektorů. Směrový vektor $u_1 = (1,1,1)$ se zobrazí sám na sebe $\varphi(1,1,1) = (1,1,1)$. Vektory kolmé k u_1 se zobrazí do opačných vektorů, tedy například $\varphi(1,-1,0) = (-1,1,0)$ a $\varphi(0,1,-1) = (0,-1,1)$. Nyní postupujeme obdobným způsobem jako v předchozí úloze.

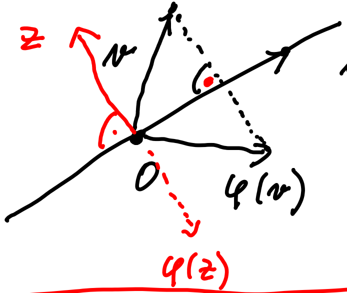


Výsledek:

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}^2$

$z \perp u$



$u = (1,1,1)$

$\varphi(u) = u$

$\varphi(z) = -z$

$\mathbb{R}^3$

$u = (1,1,1)$

$v = (1,-1,0) \qquad \langle u, v\rangle = 0$

$z = (0,1,-1) \qquad \langle u, z\rangle = 0$

$\varphi(u) = u, \quad \varphi(v) = -v, \quad \varphi(z) = -z$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Příklad – lineární zobrazení v polynomech

Příklad

Uvažme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dané předpisem $\varphi(g) = g' + x \cdot g$. Nalezněte maticové vyjádření tohoto zobrazení v souřadnicích obvyklých bazí $\alpha = (x^2, x, 1)$ a $\beta = (x^3, x^2, x, 1)$. (g' značí derivaci polynomu g.)

Pro $g = ax^2 + bx + c$ máme
$\varphi(g) = (2ax + b) + (ax^3 + bx^2 + cx) = ax^3 + bx^2 + (2a + c)x + b$.
Souřadnicím polynomu g v bázi α, které jsou $(g)_\alpha = (a, b, c)$ přiřadíme souřadnice polynomu $\varphi(g)$ v bázi β, tedy $(\varphi(g))_\beta = (a, b, 2a + c, b)$.
Hledaná matice A má vlastnost $A \cdot (a, b, c)^T = (a, b, 2a + c, b)^T$. Proto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a+c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vektory

15:04 $\varphi : U \to U$

V příkladě o symetrii podle přímky byly pro nás užitečné vektory splňující rovnici $\varphi(u) = \lambda \cdot u$ pro vhodný skalár λ (konkrétně $\lambda = 1, \lambda = -1$). Takové vektory hrají důležitou roli i v mnoha dalších úlohách, proto jim dáme zvláštní jméno.

$\varphi(u) = u$
$= 1 \cdot u$
$\varphi(w) = -w$
$\varphi(z) = -z$
$= (-1) \cdot z$

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení. Skaláry λ vyhovující rovnici

$$\varphi(u) = \lambda \cdot u$$

pro nenulový vektor $u \in V$ nazýváme vlastní čísla (hodnoty) zobrazení φ, příslušné vektory $u \neq 0$ nazýváme vlastní vektory zobrazení φ.

$u = \vec{0}$ $\qquad \varphi(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0}$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

Vlastní čísla a vektory – příklad

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Uvažujme matici A a vektory u a v:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Platí

−1 je vl. čísla

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -u,$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot v.$$

2 je vl. čísla

Jsou tedy $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 2$ vlastní čísla matice A a jejich příslušné vlastní vektory jsou u (pro λ_1) a v (pro λ_2).
Jiná vlastní čísla nejsou, jak uvidíme za chvíli.

Jak hledat vlastní čísla a vektory?

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ dimenze n a $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení. Postup při hledání vlastních čísel a vektorů je následující:

1) Rovnost $\varphi(u) = \lambda \cdot u$ můžeme zapsat v souřadnicích ve zvolené bázi α jako soustavu $Ax = \lambda \cdot x$, kde x jsou souřadnice hledaného vlastního vektoru zapsané do sloupce a A je maticové vyjádření lineárního zobrazení v bázi α. Tuto soustavu přepišme do tvaru homogenní soustavy rovnic $(A - \lambda E)x = 0$.

   $Ax - \lambda x = 0$
   $Ax - \lambda E x = 0$
   $(A - \lambda E)x = 0$

2) Taková soustava rovnic má netriviální řešení $x \neq 0$ právě tehdy, když $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$.
3) $\det(A - \lambda \cdot E)$ je polynom stupně n (v proměnné λ), tzv. charakteristický polynom. Jeho kořeny jsou hledaná vlastní čísla.

   x_0 je kořen poly p, přičemž $p(x_0) = 0$.

4) Vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy $(A - \lambda E)x = 0$.

1. příklad

Příklad

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme charakteristický polynom

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Jestliže má polynom s celočíselnými koeficienty celočíselný kořen, musí tento kořen dělit koecicient u $\lambda^0 = 1$, v našem případě číslo 6. Hledáme ho tedy mezi děliteli čísla 6, tj. mezi čísly $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

1. příklad – pokračování

Dosazením zjistíme, že $\lambda_1 = 1$ je kořen. Charakteristický polynom vynásobený -1 vydělíme $\lambda - 1$. Dostaneme

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

Kořeny kvadratického polynomu $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ umíme spočítat. Jsou $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 3$. Vlastní vektory k $\lambda_1 = 1$ najdeme řešením homogenní soustavy $(A - \lambda_1 E)x = 0$. Ta má matici soustavy

$A - E$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Všechny vlastní vektory k vlastnímu číslu 1 jsou tedy $p(1,1,2)$ s $p \neq 0$. Analogicky najdeme vlastní vektory k vlastnímu číslu 2, jsou to $q(1,0,1)$, $q \neq 0$, a vlastnímu číslu 3, ty jsou $s(1,2,3)$, $s \neq 0$.

1. příklad – dokončení

Všimněte si, jak vypadá vyjádření zobrazení φ v souřadnicích báze α tvořené vlastními vektory $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 2, 2)$. Dostáváme totiž

$u = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$

$$\varphi(u) = \varphi(y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3) = y_1 \varphi(u_1) + y_2 \varphi(u_2) + y_3 \varphi(u_3)$$
$$= y_1 u_1 + y_2 \cdot 2u_2 + y_3 \cdot 3u_3.$$

Tedy maticové vyjádření zobrazení φ v souřadnicích báze tvořené vlastními vektory je

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_2 \\ 3y_3 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že použití této báze nám významně pomůže zjednodušit popis zobrazení.

2. příklad

Příklad

Najděte vlastní čísla a vektory zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -10 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 + 4\lambda + 13.$$

$D = 4^2 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$

Tento kvadratický polynom nemá reálné kořeny, neboť jeho diskriminant je záporný (-36). Zobrazení tedy nemá reálná vlastní čísla ani vlastní vektory. (Má však komplexní vlastní čísla $-2 \pm 3\,\mathrm{i}$.)

$\frac{-4 \pm i\sqrt{|D|}}{2} = \frac{-4 \pm i6}{2}$

Podprostor vlastních vektorů

λ vl. č. od φ $\quad K = \{ u \in V,\ \varphi(u) = \lambda u \} \subseteq V$

$\varphi : V \to V$

- Je-li u vlastní vektor matice A příslušející vlastnímu číslu λ, potom libovolný jeho (nenulový) násobek je také vlastní vektor příslušející témuž vlastnímu číslu, protože

$u \in K \Rightarrow au \in K$ $\qquad \varphi(u) = \lambda u$

$$A(a\,u) = a(Au) = a(\lambda\,u) = \lambda\,(a\,u).$$

$u, v \in K$

$\Downarrow$

$u + v \in K$

- Podobně, jsou-li u, v vlastní vektory matice A příslušející vlastnímu číslu λ (kde $u \neq -v$), potom jejich součet je také vlastní vektor příslušející témuž vlastnímu číslu, protože

$$A(u+v) = (Au) + (Av) = (\lambda\,u) + (\lambda\,v) = \lambda\,(u+v).$$

- Vlastní vektory příslušející témuž vlastnímu číslu tedy tvoří (společně s nulovým vektorem) podprostor vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$. To také zdůvodňuje terminologii „vlastní prostor“.

Příklad

Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2.$$

Proto je $\lambda_1 = 2$ (násobnosti 2) jediné vlastní číslo. Výpočet vlastního prostoru pro $\lambda_1 = 2$: $(A - 2E)\,x = 0$

$$(A - \lambda_1 E \,|\, 0) = (A - 2E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$ je $\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} = [(1, 0)]$.

alg. násobnost $\lambda_1 = 2$, geom. nás. $= 1$.

Obecné poznatky

Věta

Vlastní vektory lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.

Věta

Jestliže existuje n navzájem různých kořenů λ_i charakteristického polynomu zobrazení $\varphi : V \to V$, $\dim V = n$, pak existuje báze V složená výhradně z vlastních vektorů a v této bázi má φ diagonální matici (s vlastními čísly na diagonále).

$y \longmapsto Ay$ $\qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = A$

Zobecnění 1. příkladu na vl. čísla a vektory $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Obecné poznatky II

λ_0 je kořen násobnosti k

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \, q(\lambda) \qquad q(\lambda_0) \neq 0$$

Věta

Tzv. geometrická násobnost vlastního čísla λ (dimenze vlastního podprostoru příslušného λ) není větší než algebraická násobnost λ (násobnost λ jako kořene charakteristického polynomu).

λ_0 je vl. čísla alg. násobnosti k

Věta

Symetrické matice nad $\mathbb{R}$ mají všechna vlastní čísla reálná.

$$K = \{ v \in V,\ \varphi(v) = \lambda_0 v \}$$

$$1 \leq \underset{\text{geometrická násobnost}}{\underset{\parallel}{\dim K}} \leq k = \text{alg. násobnost } \lambda_0$$

Požadavky

- Umět určit matici lineárního zobrazení ve standardní bázi ze znalosti hodnot lineárního zobrazení na vektorech nějaké báze.
- Umět spočítat vlastní čísla a vlastní vektory.

Domácí úloha

Příklad (5.1)

Nechť φ je zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe a to symetrie podle roviny zadané rovnicí $x_1 - x_3 = 0$. Určete matici A takovou, že $\varphi(x) = Ax$ v souřadnicích standardní báze.

$u, v \in$ rovina

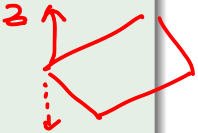
$\varphi(u) = u, \quad \varphi(v) = v,$

$z \perp$ rovina

Příklad (5.2)

Nechť je dána matice A lineárního zobrazení vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ do sebe, o níž víme, že má vlastní číslo 2. Určete všechna vlastní čísla a jim příslušné podprostory (vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$) sestávající z jejich vlastních vektorů.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$



$\varphi(z) = -z$