MB141 – 7. přednáška
Afinní geometrie

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2021

Osnova přednášky

- Afinní podprostory v $\mathbb{R}^n$
- Parametrický a implicitní popis
- Hodnost matice a soustavy lineárních rovnic
- Průnik a součet afinních podprostorů
- Vzájemná poloha afinních podprostorů
- Standardní úlohy

Geometrie ve vícerozměrném prostoru

Pokud bereme $\mathbb{R}^3$ jako vektorový prostor, tak všechny jeho vektorové podprostory jsou

- $\{0\}$ množina obsahující pouze nulový vektor (počátek),
- přímky procházející počátkem,
- roviny procházející počátkem,
- celé $\mathbb{R}^3$.

Chceme-li se ale zabývat geometrií v prostoru, potřebujeme pracovat se všemi přímkami a všemi rovinami. Proto zavádíme pojem afinního prostoru a jeho afinních podprostorů. Prvky $\mathbb{R}^3$ (obecně $\mathbb{R}^n$) bereme jednak jako body, jednak jako vektory, tj. uvažujeme množinu bodů $\mathcal{B}$ a vektorový prostor V a přitom máme operaci „přičtení vektoru k bodu“:
$+ : \mathcal{B} \times V \to \mathcal{B},\ (B, v) \mapsto B + v$ a s ní sdruženou operaci „rozdíl bodů“: $- : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to V$, $(A, B) \mapsto B - A = \overrightarrow{AB}$.

Afinní prostory

Definice

Buď $V = \mathbb{R}^n$ vektorový prostor. Standardní afinní prostor $\mathcal{A}_n = \mathbb{R}^n$ je množina všech bodů v $\mathbb{R}^n$ spolu s operací, která bodu $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathcal{A}_n$ a vektoru $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ přiřadí bod $A + v = [a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n] \in \mathcal{A}_n$.

Tato operace splňuje následující tři vlastnosti:

1. $A + 0 = A$ pro všechny body $A \in \mathcal{A}_n$ a nulový vektor $0 \in V$,
2. $A + (v + w) = (A + v) + w$ pro všechny vektory $v, w \in V$, a body $A \in \mathcal{A}_n$,
3. pro každé dva body $A, B \in \mathcal{A}_n$ existuje právě jeden vektor $v \in V$ takový, že $A + v = B$. Značíme jej $B - A$, nebo $\overrightarrow{AB}$.

Vektorový prostor V nazýváme zaměření afinního prostoru $\mathcal{A}_n$. Abychom předešli nejasnostem, tak oddělíme formálně množinu $\mathcal{A}_n$ a V tak, že body z $\mathcal{A}_n$ píšeme do hranatých závorek: $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathcal{A}_n$.

Afinní souřadná soustava

Pokud zafixujeme jeden pevný bod $A_0 \in \mathcal{A}_n$ a pevnou bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ ve V, tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}_n$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Hovoříme o afinní soustavě souřadnic $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ zadané počátkem afinní souřadné soustavy A_0 a bazí zaměření α.

Afinní souřadnice bodu $A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ v soustavě $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ jsou $[x_1, \dots, x_n]$.

Obvykle bereme $A_0 = [0, \dots, 0]$ a standardní bázi $\alpha = \varepsilon_n$. Potom jsou afinní souřadnice bodu $A = [a_1, \dots, a_n]$ stejná n-tice $[a_1, \dots, a_n]$.

Afinní podprostory

Definice

Neprázdná podmnožina $\mathcal{M}$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ se zaměřením V se nazývá afinní podprostor v $\mathcal{A}_n$, jestliže existuje vektorový podprostor $W \subseteq V$ takový, že pro některý bod $A \in \mathcal{M}$ je podmnožina

$$\mathcal{M} = \{A + v \in \mathcal{A}_n \mid v \in W\}.$$

Zapisujeme $\mathcal{M} = A + W$.

- Vektorový podprostor W se nazývá zaměření afinního podprostoru $\mathcal{M}$. Značíme ho $Z(\mathcal{M})$ a píšeme $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$.
- Dimenzí afinního podprostoru rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Afinní kombinace bodů

Afinní kombinací bodů B a C z $\mathcal{A}_n$ je bod

$$D = (1 - \lambda)B + \lambda C$$

definovaný jako součet bodu a vektoru takto $D = B + \lambda(C - B)$. Jsou-li body B a C různé, pak všechny jejich afinní kombinace vytvářejí přímku. Pomocí afinních kombinací můžeme afinní podprostory charakterizovat takto:

Věta

Neprázdná podmnožina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_n$ je afinní podprostor, právě když s každými dvěma body obsahuje všechny jejich afinní kombinace. To geometricky znamená, že $\mathcal{M}$ s každými dvěma body obsahuje i přímku, která jimi prochází.

Parametrický popis

Nechť $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}_n$ a $(u_1, \ldots, u_k)$ je báze $Z(\mathcal{M}) \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak vyjádření podprostoru

$$\mathcal{M} = \{A + t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme parametrický popis podprostoru $\mathcal{M}$. Příklady:

- Příkladem na parametrický popis přímky v $\mathcal{A}_3$ je $p: \ X = [2, 3, -8] + t(4, 1, 5)$, v jednotlivých souřadnicích $x_1 = 2 + 4t$, $x_2 = 3 + t$, $x_3 = -8 + 5t$.
- Příkladem na parametrický popis roviny v $\mathcal{A}_3$ je $\sigma : X = [3, -1, 2] + r(4, 6, 1) + s(-1, 0, 3)$, v souřadnicích $x_1 = 3 + 4r - s,\ x_2 = -1 + 6r,\ x_3 = 2 + r + 3s$.

Implicitní (obecný) popis afinního podprostoru

Uvažujme soustavu 4 lineárních rovnic o 5 neznámých $Ax = b$. Rozšířenou matici soustavy upravíme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešením je množina
$\mathcal{M} = \{[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1) \in \mathbb{R}^5 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.
To je parametrický popis afinního podprostoru. Zaměření tohoto podprostoru je
$Z(\mathcal{M}) = \{t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1) \in \mathbb{R}^5 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$, což je řešení homogenní soustavy $Ax = 0$. Vidíme, že $\dim \mathcal{M} = 2$.

Jestliže množina řešení soustavy $Ax = b$ je neprázdná, jde o afinní podprostor. Popis afinního podprostoru pomocí soustavy lineárních rovnic se nazývá implicitní nebo také obecný popis.

Hodnost matice a soustavy lineárních rovnic

Dimenze afinního podprostoru, který je množinou řešení soustavy lineárních rovnic, souvisí s hodností matice.

Definice

Nechť je A matice s k řádky a n sloupci, tj. každý sloupec je prvek $\mathbb{R}^k$ a každý řádek je prvek $\mathbb{R}^n$. Následující tři celá čísla se rovnají

1) počet nenulových řádků po úpravě na schodovitý tvar,
2) maximální počet lineárně nezávislých řádků,
3) maximální počet lineárně nezávislých sloupců.

Jejich společnou hodnotu nazýváme **hodností matice A** a značíme $\mathrm{h}(A)$.

- Soustava $A \cdot x = b$ má řešení právě tehdy, když hodnost matice A je rovna hodnosti rozšířené matice $(A \mid b)$, tj.

$$\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A \mid b).$$

Hodnost matice – příklady I

- Pokud má soustava $A \cdot x = b$ řešení $x \in \mathbb{R}^n$, pak množina všech řešení je afinní podprostor dimenze
$$n - \mathrm{h}(A).$$
Zaměření tohoto afinního podprostoru je množina řešení homogenní soustavy $Ax = 0$.

Příklady:

- Matice A tvaru 4×5 v příkladu na straně 9 má hodnost 3 a ta je rovna hodnosti matice $(A \mid b)$. Dimenze příslušného afinního podprostoru je $5 - \mathrm{h}(A) = 5 - 3 = 2$.
- Rovnice $3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 9$ je implicitním popisem roviny v $\mathcal{A}_3$. Příslušná matice je $A = (3, 7, -2)$. Její hodnost je 1. Dimenze afinního podprostoru, který popisuje, je $3 - 1 = 2$, což odpovídá tomu, že dimenze roviny je 2.

Hodnost matice – příklady II

- Soustava $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$ má matici $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, jejíž hodnost je 2. Dimenze příslušného afinního podprostoru je $3 - 2 = 1$, což odpovídá tomu, že jde o přímku v $\mathcal{A}_3$.
- Rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ s aspoň jedním nenulovým koeficientem a_i popisuje afinní podprostor v $\mathcal{A}_n$ dimenze $n - \mathrm{h}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = n - 1$. Nazýváme jej nadrovinou v $\mathbb{R}^n$.

Přechod od implicitního (obecného) popisu afinního podprostoru soustavou $Ax = b$ k parametrickému popisu je jednoduchý, stačí soustavu vyřešit. Příklad jsme si již ukázali na straně 9.

Od parametrického vyjádření k implicitnímu

Přechod od parametrického popisu k implicitnímu (obecnému) je také vždy možný. Ze soustavy rovnic, kde vystupují souřadnice $x_1, x_2, \dots, x_n$ a parametry $t_1, t_2, \dots, t_k$, $k < n$, vypočteme z k rovnic parametry t_i a ty dosadíme do zbývajících rovnic. Ukážeme si to na příkladu.

Příklad

Nalezněte nějakou soustavu lineárních rovnic, jejíž řešení je $\{[0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 1, 1) + s(2, 2, -1, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Parametrický popis v souřadnicích je

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -2t + 2s \\
x_2 &= -1 + t + 2s \\
x_3 &= 2 + t - s \\
x_4 &= t + s
\end{aligned}
$$

Od parametrického vyjádření k implicitnímu II

Z posledních dvou rovnic spočítáme

$$2t = x_3 + x_4 - 2$$
$$2s = x_4 - x_3 + 2$$

a dosadíme do prvních dvou rovnic. Druhou vynásobíme dvěma. Dostaneme

$$x_1 = -2x_3 + 4$$
$$2x_2 = -x_3 + 3x_4,$$

což dává soustavu $Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = b$.

Všimněte si, že řádky matice A jsou lineárně nezávislé a kolmé k vektorům zaměření, které se vyskytují v parametrickém popisu. Dále, když maticí A vynásobíme souřadnicemi bodu $[0, -1, 2, 0]^T$ dostaneme pravou stranu b. Toto platí obecně a můžeme to využí k nalezení nejdříve matice A a pak pravé strany b.

Průnik afinních podprostorů

Je-li průnik afinních podprostorů neprázdný, je opět afinním podprostorem. Metoda výpočtu průniku afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ závisí na vyjádření prostorů.

- Oba implicitně: ze 2 soustav vytvoříme jednu velkou soustavu.
- Jeden implicitně a druhý parametricky: dosadíme z parametrického vyjádření do soustavy.
- Oba parametricky: porovnáním parametrických vyjádření vznikne soustava pro parametry.

Ukážeme si řešení v druhém případě.

Příklad

V $\mathcal{A}_3$ najděte průnik roviny $\sigma: 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 1 = 0$ s rovinou $\rho: X = [1, 3, 11] + t(1, 0, 1) + s(0, 1, 2)$.

Příklad na průnik – dokončení

Parametrické vyjádření roviny ρ

$$x_1 = 1 + t,\ x_2 = 3 + s,\ x_3 = 11 + t + 2s$$

dosadíme do rovnice pro rovinu σ.

$$2(1 + t) + 3(3 + s) - (11 + t + 2s) + 1 = 0.$$

Po úpravě $t + s + 1 = 0$. Řešením jsou dvojice $(t, s) = (a, -1 - a)$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr. Body průniku jsou tedy ty body X z roviny σ, které napíšeme pomocí parametrů $t = a$ a $s = -1 - a$:

$$\begin{aligned} X &= [1, 3, 11] + a(1, 0, 1) - (a + 1)(0, 1, 2) \\ &= [1, 2, 9] + a(1, -1, -1). \end{aligned}$$

Tedy průnikem je přímka s parametrickým vyjádřením $[1, 2, 9] + a(1, -1, -1)$.

Afinní obal množiny a spojení afinních podprostorů

- Afinní podprostor $\langle M \rangle$ v $\mathcal{A}_n$ generovaný neprázdnou množinou M je nejmenší afinní podprostor obsahující množinu M, je to průnik všech afinních podprostorů, které obsahují M.
- Hovoříme také o afinním obalu množiny bodů M v $\mathcal{A}_n$.
- Příklad: afinní obal dvou přímek $A + t \cdot u$ a $B + s \cdot v$ se směrovými vektory u, v je $A + [u, v, \overrightarrow{AB}]$.
- Pro dvojici afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ se afinnímu obalu množiny $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ říká spojení afinních podprostorů. Značíme $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$.
- Pro $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M}), \mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ pak platí $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} = A + Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}) + [\overrightarrow{AB}]$. Jeho zaměření je součet tří vektorových podprostorů $Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}) + [\overrightarrow{AB}]$.

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Mějme podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. Pro jejich vzájemnou polohu jsou tyto možnosti:

1. Jsou si rovny, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}) = Z(\mathcal{N})$.
2. Jeden je podprostorem druhého, např. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$.
3. Podprostory jsou rovnoběžné, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a platí buď $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ nebo $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$.
4. Podprostory jsou různoběžné, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a neplatí ani $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ ani $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$.
5. Podprostory jsou mimoběžné, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ a neplatí ani $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ ani $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$

Vzájemnou polohu umíme počítat, neboť všechny podmínky umíme prověřit – stačí určit $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ a $Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N})$.

Příklad na vzájemnou polohu

Příklad

Zjistěte vzájemnou polohu rovin π a ρ v $\mathcal{A}_4$.

$$\pi : X = [1, 1, 0, 2] + a(1, 0, 1, 1) + b(1, 0, 0, 1),$$
$$\rho : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \quad x_1 - x_2 - x_4 = 4.$$

Nejdříve zjistíme průnik $\pi \cap \rho$. Bod průniku $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ má parametrické vyjádření bodu roviny π
$x_1 = 1 + a + b,\ x_2 = 1,\ x_3 = a,\ x_4 = 2 + a + b$.
To dosadíme do rovnic pro ρ. Dostaneme
$a + 2b + 4 = 2,\ -2 = 4$. Je vidět, že soustava nemá řešení, tedy průnik $\pi \cap \rho = \emptyset$.
Nyní najdeme průnik $Z(\pi) \cap Z(\rho)$.

$$Z(\pi) : u = a(1, 0, 1, 1) + b(1, 0, 0, 1),$$
$$Z(\rho) : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 - x_4 = 0.$$

Příklad na vzájemnou polohu – dokončení

Počítáme stejně jako v předchozím případě a pro parametry dostaneme rovnice $a + 2b = 0,\ 0 = 0$. Řešením jsou dvojice $(a, b) = (2t, -t)$. Průnik zaměření je proto

$$\{2t(1, 0, 1, 1) - t(1, 0, 0, 1)\} = [(1, 9, 2, 1)].$$

Dimenze obou zaměření $Z(\pi)$ a $Z(\rho)$ jsou 2, dimenze průniku je 1, tedy nenastane $Z(\pi) \subseteq Z(\rho)$ ani $Z(\rho) \subseteq Z(\pi)$. (V tomto případě, kdy se dimenze rovnají, je každá s inkluzí ekvivalentní rovnosti $Z(\pi) = Z(\rho)$.)

Závěr: Roviny π a ρ jsou mimoběžné.

Standardní příklady na afinní podprostory I

Příklad

Zjistěte, zda body $[0, 2, 1]$, $[-1, 2, 0]$, $[-2, 5, 2]$ a $[0, 5, 4]$ z $\mathcal{A}_3$ leží v jedné rovině.

- Libovolná dvojice zadaných bodů z afinního prostoru $\mathcal{A}_3$ určuje vektor. To, že čtyři body leží v rovině je ekvivalentní tomu, že jsou tři vektory, dané jedním vybraným bodem a vždy jedním ze tří zbylých, lineárně závislé.
- Vybereme např. bod $[0, 2, 1]$ (na výběru nezáleží), pak uvažujeme vektory $[-1, 2, 0] - [0, 2, 1] = (-1, 0, -1)$, $[-2, 5, 2] - [0, 2, 1] = (-2, 3, 1)$, $[0, 5, 4] - [0, 2, 1] = (0, 3, 3)$.
- Již známým výpočtem zjistíme, že vektory jsou lineárně závislé. Dané body leží tedy v rovině.

Standardní příklady na afinní podprostory II

Průnik a spojení afinních podprostorů je nástroj, který se často používá k řešení mnoha jiných příkladů.

Příklad

Najděte příčku dvou mimoběžných přímek

$$p:\ [1,1,1]+t(2,1,0),\quad q:\ [2,2,0]+t(1,1,1)\,,$$

takovou, že přímka jí určená prochází bodem $C=[1,0,0]$.

Příčkou rozumíme úsečku, jejíž jeden krajní bod leží na jedné z přímek, druhý krajní bod na druhé.

Označme $A=[1,1,1]$. Jeden krajní bod příčky $Q\in q$ najdeme jako průnik přímky q s rovinou ρ, která je spojením přímky p a bodu C. Ta má rovnici

$$A+t(2,1,0)+s\cdot\overrightarrow{AC}=[1,1,1]+t(2,1,0)+s(0,1,1)\,.$$

Příčka mimoběžek – dokončení

Průnikem je bod $Q = [5, 5, 3] \in q$. Rovnice přímky CQ je $C + a \cdot \overrightarrow{CQ} = [1, 0, 0] + a(4, 5, 3)$. Její průnik s přímkou p je bod $P = [7/3, 5/3, 1] \in p$, druhý krajní bod příčky.

Požadavky

- Přechod od implicitního popisu k parametrickému a obráceně.
- Výpočet průniku dvou afinních podprostorů.
- Výpočet spojení dvou afinních podprostorů.
- Výpočet vzájemné polohy afinních podprostorů.
- Nalezení afinního podprostoru daných vlastností.

Domácí úloha

Příklad (7.1)

Najděte parametrický a obecný popis roviny v $\mathbb{R}^4$, která prochází body $A = [1, 0, 1, 0]$, $B = [0, 1, 0, 2]$ a $C = [1, 2, 3, 4]$.

Příklad (7.2)

Určete příčku mimoběžek

$$\begin{aligned} p: &\quad [3, 0, 3] + t \cdot (0, 1, 2) \\ q: &\quad [0, -1, -2] + s \cdot (1, 2, 3)\ , \end{aligned}$$

která je rovnoběžná s vektorem $v = (1, -2, 1)$.

Domácí úloha

Příklad (7.3)

V prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány tři body $A = [1, 2, 3, 6]$, $B = [2, 3, 1, 6]$ a $C = [0, 1, 2, 6]$, které generují afinní podprostor $\mathcal{M}$. Dále $\mathcal{N}$ je afinní podprostor zadaný implicitně

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 7 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 2\,. \end{aligned}$$

Určete afinní podprostory $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ a $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ (včetně dimenzí).

Domácí úloha

Příklad (7.4)

Nechť v prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor $\mathcal{M}$ zadaný implicitně

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 - x_4 &= 5\,. \end{aligned}$$

Určete vzájemnou polohu podprostoru $\mathcal{M}$ a přímky p dané takto:

a) $p : [4, 0, 3, -2] + t \cdot (1, -1, 1, -1)$,

b) $p : [1, 1, 1, 1] + t \cdot (1, 1, 0, 1)$,

c) $p : [1, 1, 1, 1] + t \cdot (1, -1, 0, 1)$.