MB141 – 8. přednáška
Eukleidovská geometrie

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2021

Osnova přednášky

- Eukleidovské prostory
- Velikost vektorů a vzdálenost podprostorů
- Odchylky podprostorů
- Orientovaný objem rovnoběžnostěnu
- Orientace a vektorový součin v $\mathbb{R}^3$

Eukleidovské prostory

V afinní geometrii zkoumáme vzájemnou polohu geometrických útvarů, zatímco eukleidovská geometrie počítá jejich vzdálenosti, odchylky a objemy. $\mathbb{R}^n$

Standardní bodový euklidovský prostor $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

A_0

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \alpha)$ s ortonormální bazí α.

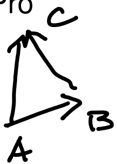
Vzdálenost bodů $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}.$$

Euklidovské podprostory v $\mathcal{E}_n$ jsou afinní podprostory, jejichž zaměření uvažujeme spolu se standardním skalárním součinem.

Vzdálenost bodů

Vzdálenost bodů A a B budeme označovat $\operatorname{dist}(A, B)$. Pro každé tři body $A, B, C \in \mathcal{E}_n$ platí



- $\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(B, A)$, symetrie,
- $\operatorname{dist}(A, B) = 0$ právě, když $A = B$,
- $\operatorname{dist}(A, B) + \operatorname{dist}(B, C) \geq \operatorname{dist}(A, C)$, trojúhelníková nerovnost.

V kartézké souřadné soustavě $(A_0; \varepsilon)$ mají body

$$A = A_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \qquad B = A_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

vzdálenost $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$.

$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{E}_n$

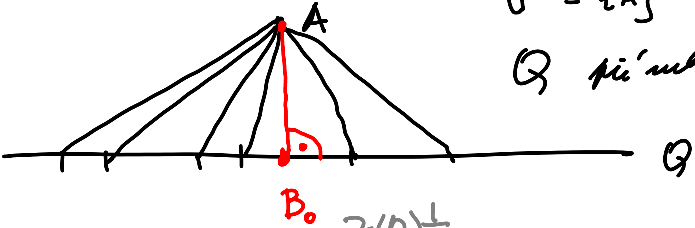
Definice

Vzdálenost dvou afinních podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ definujeme takto

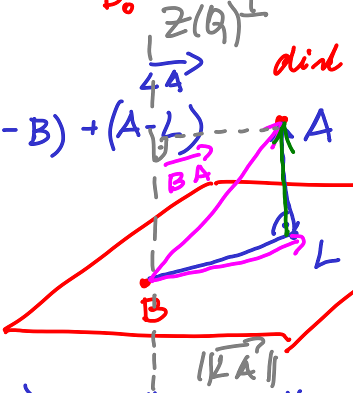
$$\operatorname{dist}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \min\{\operatorname{dist}(A, B) \mid A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{Q}\}.$$

$\mathbb{P} = \{A\}$

Q přímka



$\mathrm{dist}(A, Q) = \mathrm{dist}(A, B_0)$



$$(A - B) = (L - B) + (A - L)$$

$\overrightarrow{LA} \perp Q$

$\overrightarrow{BL}$ je kolmá projekce vektoru $\overrightarrow{BA}$ do $Z(Q)$

$Q = B + Z(Q)$

$\overrightarrow{LA}$ je kolmá projekce vektoru $\overrightarrow{BA}$ do $Z(Q)^{\perp}$.

$$\mathrm{dist}(A, Q) = \| A - L \|$$

$$L = B + P_{Z(Q)}(\overrightarrow{BA})$$

Vzdálenost bodu od afinního podprostoru

Ukážeme si, jak počítat vzdálenost bodu A od roviny $\mathcal{Q}$ v $\mathcal{E}_3$. V rovině $\mathcal{Q}$ uvažujme nějaký bod B. Potom $\mathcal{Q} = B + Z(\mathcal{Q})$. Nechť L je pata kolmice vedené z bodu A na rovinu $\mathcal{Q}$. (Malujte si obrázek.) Vzdálenost bodu A od roviny $\mathcal{Q}$ je rovna vzdálenosti bodů A a L.

$$\mathrm{dist}(A, \mathcal{Q}) = \mathrm{dist}(A, L).$$

Přitom vektor $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LA}$, kde $\overrightarrow{BL}$ je kolmá projekce vektoru $\overrightarrow{BA}$ do zaměření $Z(\mathcal{Q})$ a $\overrightarrow{LA}$ je kolmá projekce do ortogonálního doplňku $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$. Označíme-li $P_{Z(\mathcal{Q})}$ kolmou projekci do $Z(\mathcal{Q})$ a $P_{Z(\mathcal{Q})^{\perp}}$ kolmou projekci do $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$, dostáváme

$$\mathrm{dist}(A, \mathcal{Q}) = \|P_{Z(\mathcal{Q})^{\perp}}(\overrightarrow{BA})\| \quad \text{a} \quad L = B + P_{Z(\mathcal{Q})}(\overrightarrow{BA}).$$

Příklad

Určete vzdálenost bodu $A = [2, 1, 2]$ a roviny

$$\mathcal{Q} : [1, 1, 1] + t(1, 1, 0) + s(0, 1, 1).$$

Vzdálenost bodu od roviny – řešení příkladu

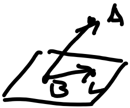
Vzdálenost $A = [2,1,2]$ od $\mathcal{Q} : \underbrace{[1,1,1]}_{B} + \underbrace{t(1,1,0) + s(0,1,1)}_{Z(\mathcal{Q})}$.

- Označme $B = [1,1,1]$. Prvně spočítáme ortogonální doplněk k zaměření roviny. Ten je generován vektorem $\underline{n = (1,-1,1)}$. Dále spočítáme kolmou projekci vektoru $\underline{u = \overrightarrow{BA} = (1,0,1)}$ do $Z(\mathcal{Q})^\perp$. Tu hledáme ve tvaru $P_{Z(\mathcal{Q})^\perp}(u) = a \cdot n$. Platí $\langle u - a \cdot n,\ n \rangle = 0$. Odtud $\underline{a = \frac{2}{3}}$.

  $a = \frac{\langle u, n \rangle}{\langle n, n \rangle}$

  Proto
  $$\operatorname{dist}(A, \mathcal{Q}) = \| \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \| = \tfrac{2}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

- Nyní najdeme bod $\underline{L \in \mathcal{Q}}$, ve kterém se vzdálenost realizuje, tj. $\operatorname{dist}(A, L) = \operatorname{dist}(A, \mathcal{Q})$.



$$\underline{L} = \underline{B} + \underline{P_{Z(\mathcal{Q})}(u)} = B + (u - P_{Z(\mathcal{Q})^\perp}(u))$$
$$= [1,1,1] + \left((1,0,1) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

Vzdálenost bodu od roviny – alternativní řešení

Předchozí příklad jde také řešit tak, že prvně spočítáme kolmou projekci vektoru $\overrightarrow{BA} = u$ do zaměření $Z(\mathcal{Q})$. To je trochu složitější než počítat kolmou projekci do $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$, neboť $\dim Z(Q) = 2 > 1 = \dim Z(\mathcal{Q})^{\perp}$. Pak najdeme bod L, kde se vzdálenost realizuje:

$$L = B + P_{Z(\mathcal{Q})}(u) = [1, 1, 1] + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

a odtud

$$\mathrm{dist}(A, \mathcal{Q}) = \mathrm{dist}(A, L) = \|[2, 1, 2] - \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right]\| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

Vzdálenost bodu od afinního podprostoru obecně

Výpočet vzdálenosti bodu od libovolného afinního podprostoru v $\mathcal{E}_n$ provádíme analogicky. Stačí k tomu umět počítat ortogonální doplněk a kolmou projekci, což jsme se naučili v 6. přednášce.

Věta

Nechť A je bod a $\mathcal{Q}$ afinní podprostor v $\mathcal{E}_n$. Zvolme v $\mathcal{Q}$ nějaký bod B. Pak

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{Q}) = \|P_{Z(\mathcal{Q})^\perp}(\overrightarrow{BA})\|,$$

kde $P_{Z(\mathcal{Q})^\perp}$ je kolmou projekcí do ortogonálního doplňku zaměření $Z(\mathcal{Q})^\perp$.
Bod, v němž se vzdálenost realizuje je

$$Q = B + P_{Z(\mathcal{Q})}(\overrightarrow{BA})$$

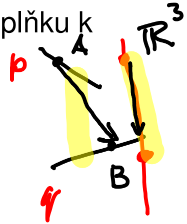
kde $P_{Z(\mathcal{Q})}$ je kolmou projekcí do zaměření $Z(\mathcal{Q})$.

Mějme v $\mathcal{E}_3$ dvě přímky p a q. Jejich vzdálenost jsme definovali

$$\mathrm{dist}(p,q) = \min\{\mathrm{dist}(P,Q) \mid P \in p,\ Q \in q\}.$$

Představme si přímku, která je na obě přímky p a q kolmá. Potom se při kolmé projekci na tuto přímku promítne každá z přímek p a q do jediného bodu. Vzdálenost přímek je vzdáleností těchto dvou bodů. Přesněji to znamená následující:

Vezměmě bod $A \in p$ a bod $B \in q$. Vzdálenost přímek p a q je rovna kolmé projekci vektoru $\overrightarrow{AB}$ do ortogonálního doplňku k součtu zaměření $Z(p) + Z(q)$ obou přímek.



$$\boxed{\mathrm{dist}(p,q) = \|P_{(Z(p)+Z(q))^{\perp}}(\overrightarrow{AB})\|.}$$

Body $P \in p$ a $Q \in q$ jsou charakterizovány vlastností

$$\overrightarrow{PQ} \perp (Z(p)+Z(q)).$$

$P \in p$
$Q \in q$

Ukažme si výpočet na příkladu.

Příklad – vzdálenost přímek

Příklad

V $\mathcal{E}_3$ určete vzdálenost přímek

$$p:\ \overset{A}{[-4,5,5]} + t(1,-1,0), \quad \text{a} \quad q:\ \overset{B}{[1,6,8]} + s(0,2,-1).$$

- Položme $A = [-4,5,5]$ a $B = [1,6,8]$. Vektor $\overrightarrow{AB} = u = (5,1,3)$.
- Ortogonální doplněk součtu zaměření $Z(p) + Z(q)$ je $[(1,-1,0),(0,2,-1)]^\perp = [(1,1,2)]$; $\underline{v = (1,1,2)}$.
- Kolmá projekce vektoru $\underline{u}$ do $\underline{[v]}$ je $\quad \langle u - av, v\rangle = 0$
  $$av = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v = 2(1,1,2) = \underline{(2,2,4)}.$$
- Vzdálenost přímek je $\underline{\operatorname{dist}(p,q)} = \underline{\|(2,2,4)\|} = 2\sqrt{6}$. ✓
- Body $P \in p$ a $Q \in q$, které realizují vzdálenost přímek, určují vektor, který se rovná výše spočtené kolmé projekci:
  $$\overrightarrow{PQ} = (2,2,4). = \text{kolmá projekce } \overrightarrow{AB} \text{ do } (Z(p)+Z(q))^\perp$$

- Hledáme je ve tvaru $P = [-4,5,5] + t(1,-1,0)$ a $Q = [1,6,8] + s(0,2,-1)$. Dostaneme tak soustavu tří rovnic pro neznámé t a s:
$$\begin{pmatrix}1\\6\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\5\\5\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$$
- Její řešení je $t = 3$ a $s = -1$. Proto $P = [-4,5,5] + 3(1,-1,0) = [-1,2,5]$ a $Q = [1,6,8] + (-1)(0,2,-1) = [1,4,9]$.
- Přímka PQ, která je kolmá k přímce p i q a obě přímky protíná, se nazývá osa mimoběžek p a q.

$\overrightarrow{PQ} \perp p, q$ osa mimoběžek p, q

Vzdálenost podprostorů

Obecně se vzdálenost podprostorů počítá dle stejného principu. (Vzdálenost se realizuje v kolmém směru.)

Věta

Pro každé dva afinní podprostory $\mathcal{P}$ *a* $\mathcal{Q}$ *v* $\mathcal{E}_n$ *existují body* $P \in \mathcal{P}$ *a* $Q \in \mathcal{Q}$*, které realizují jejich vzdálenost, tj.* $\operatorname{dist}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \operatorname{dist}(P, Q)$*. Zvolíme-li* $A \in \mathcal{P}$ *a* $B \in \mathcal{Q}$*, je vektor*

$$\overrightarrow{PQ} = P_{(Z(\mathcal{P})+Z(\mathcal{Q}))^{\perp}}(\overrightarrow{AB}),$$

kde $P_{(Z(\mathcal{P})+Z(\mathcal{Q}))^{\perp}}(\overrightarrow{AB})$ *je kolmý průmět vektoru* $\overrightarrow{AB}$ *do* $(Z(\mathcal{P}) + Z(\mathcal{Q}))^{\perp}$ *Vzdálenost* $\mathcal{P}$ *a* $\mathcal{Q}$ *je tedy*

$$\operatorname{dist}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \|(P_{Z(\mathcal{P})+Z(\mathcal{Q}))^{\perp}}(\overrightarrow{AB})\|$$

Příklad – vzdálenost podprostorů

Příklad

Určete vzdálenost podprostorů v $\mathcal{E}_5$:

$$\sigma: [3, 3, \overset{A}{5}, 4, 1] + a(0, 1, 0, 2, -1) + b(1, -1, 1, 0, -1)$$

$$p: [2, -1, \overset{B}{2}, 2, 3] + s(1, -1, 1, -1, 1).$$

$Z(\sigma) + Z(p) = U = [(0, 1, 0, 2, -1), (1, -1, 1, 0, -1), (1, -1, 1, -1, 1)]$,
$U^\perp = [\underbrace{(1, 0, -1, 0, 0)}_{u_1}, \underbrace{(1, 3, 1, -2, -1)}_{u_2}]$,
$A = [3, 3, 5, 4, 1]$, $B = [2, -1, 2, 2, 3]$,
$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -4, -3, -2, 2). = u$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$P_{U^\perp}(\overrightarrow{AB}) = au_1 + bu_2$

$u - au_1 - bu_2 \perp u_1$

$\perp u_2$

Je třeba určit projekci $\overrightarrow{AB}$ do $U^\perp$.
! Zkuste dopočítat sami.
Projekcí do $U^\perp$ určíme i projekci do U a naopak. Proto si můžeme vybrat, do kterého z těchto dvou podprostorů bude jednodušší projekci počítat.

$$\langle u - a u_1 - b u_2, u_1 \rangle = 0$$

$$\langle u - a u_1 - b u_2, u_2 \rangle = 0$$

$$\langle u, u_1 \rangle - a \langle u_1, u_1 \rangle - b \langle u_2, u_1 \rangle = 0$$

$$\langle u, u_2 \rangle - a \langle u_1, u_2 \rangle - b \langle u_2, u_1 \rangle = 0$$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u, u_1 \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \langle u, u_2 \rangle \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & -14 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -\frac{7}{8} ? \end{array}$$

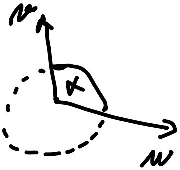
$$Pu = 2u_1 - \frac{7}{8} u_2 \quad \ldots$$

Odchylka dvou vektorů

$u \neq \vec{o} \qquad v = \vec{o}$

Pro dva nenulové vektory u a v vždy platí

$$0 \leq \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$$



$\alpha \in [0, \pi]$

Má tedy smysl následující definice.

Definice

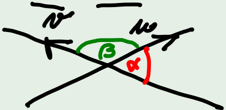
Odchylka $\alpha(u, v)$ vektorů $u, v \in V$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\underline{\cos \alpha(u, v)} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \alpha(u, v) \leq \pi.$$

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \|v\|} \leq 1 \qquad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\| \qquad -1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

Definice

1) Odchylka dvou přímek p a q se zaměřeními $[u]$ a $[v]$ je úhel $\alpha(p,q) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pro který platí

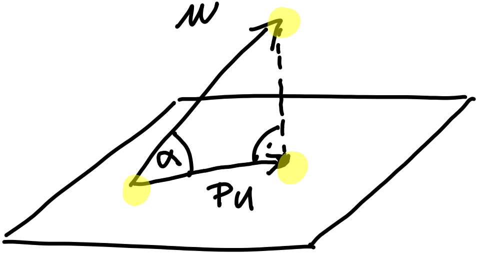


$$\cos\alpha(p,q) = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\|v\|}.$$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

2) Nechť p je přímka se zaměřením $[u]$ a ρ je rovina v $\mathcal{E}_3$. Odchylka přímky p a roviny ρ je úhel $\alpha(p,\rho) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ který se rovná odchylce vektoru u od kolmé projekce $P(u)$ vektoru u do zaměření roviny:

$$\cos\alpha(p,\rho) = \frac{|\langle u, P(u)\rangle|}{\|u\|\|P(u)\|} = \frac{\|P(u)\|}{\|u\|}.$$

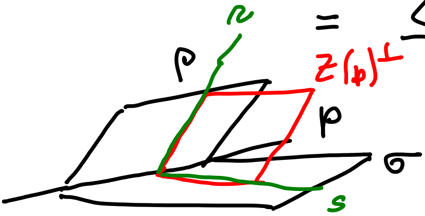


$Pu = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\cos \alpha([u], \rho) = \cos \alpha(\vec{u}, \vec{Pu})$$

$$= \frac{\langle u, Pu \rangle}{\|u\| \, \|Pu\|} = \frac{\|Pu\|}{\|u\|} \checkmark$$



$\underline{Z(p)^{\perp}}$ rovina kolmá k p

$r = Z(\rho) \cap Z(p)^{\perp}$

$s = Z(\sigma) \cap Z(p)^{\perp}$

Odchylky – pokračování

Definice

3) Jsou-li ρ a σ dvě roviny v $\mathcal{E}_3$, které jsou totožné nebo rovnoběžné, pak je jejich odchylka rovna 0.

4) Je-li průnikem dvou rovin ρ a σ v $\mathcal{E}_3$ přímka p, pak je jejich odchylka $\alpha(\rho, \sigma)$ rovna úhlu, který svírá přímka $Z(\rho) \cap Z(p)^\perp$ s přímkou $Z(\sigma) \cap Z(p)^\perp$ (nakreslete si obrázek)

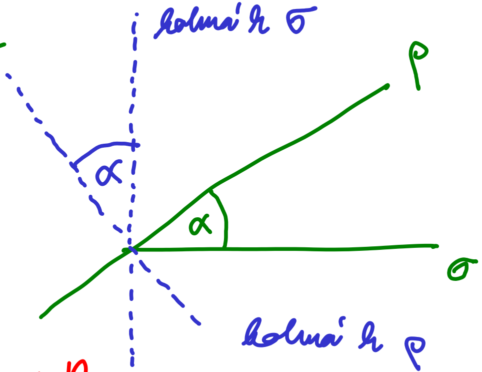
r s

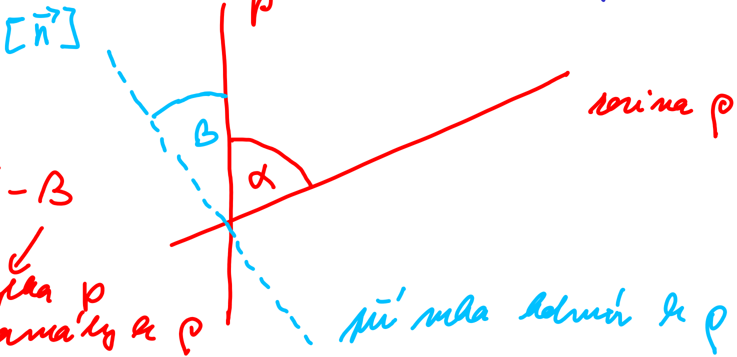
$$\alpha(\rho, \sigma) = \alpha(Z(\rho) \cap Z(p)^\perp, Z(\sigma) \cap Z(p)^\perp).$$

Při počítání odchylky dvou rovin lze také také využít skutečnost, že jejich odchylka je rovna odchylce jejich normálových přímek (přímek kolmých k rovinám). Při počítání odchylky přímky p od roviny ρ s normálovou přímkou n je $\alpha(p, \rho) = \frac{\pi}{2} - \alpha(p, n)$.

↑ jiný způsob

$\mathcal{E}_3$





$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

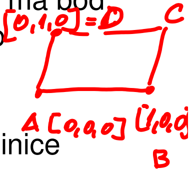
↙ odchylka p od normály k ρ

Odchylka podprostorů – příklad

Příklad

Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ (ve standardním označení, tj. $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou stěny, AA' pak hrana). Určete odchylku vektorů AB' a AD'.

Uvažujme krychli o hraně 1 a umístěme ji v $\mathbb{R}^3$ tak, že bod A bude mít ve standardní bázi souřadnice $[0, 0, 0]$, bod B pak souřadnice $[1, 0, 0]$ a bod C souřadnice $[1, 1, 0]$. Potom má bod B' souřadnice $[1, 0, 1]$ a bod D' souřadnice $[0, 1, 1]$. Pro vyšetřované vektory tedy můžeme psát [1 1, 0]



$AB' = B' - A = [1, 0, 1] - [0, 0, 0] = (1, 0, 1)$,
$AD' = D' - A = [0, 1, 1] - [0, 0, 0] = (0, 1, 1)$. Podle definice odchylky φ těchto vektorů je pak

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle}{\| (1,0,1) \| \| (0,1,1) \|} = \frac{1}{2},$$

$\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $\frac{\pi}{3}$

tedy $\varphi = 60°$.

Odchylka podprostorů – příklad II

Příklad

Určete odchylku rovin

$$\begin{aligned}\sigma :&\quad [1,0,2] + \cancel{t}\, a \cdot (1,-1,1) + \cancel{s}\, b \cdot (0,1,-2),\\ \rho :&\quad [3,3,3] + t\cdot(1,-2,0) + s\cdot(0,1,1).\end{aligned}$$

$Z(\sigma) \cap Z(\rho)$

Průsečnice má směrový vektor $(1,-1,1)$. Kolmá rovina k ní má rovnici $\boxed{x_1 - x_2 + x_3 = 0}$. Její průniky se zaměřeními daných rovin jsou postupně $[(1,0,-1)]$ a $[(0,1,1)]$. Tyto přímky svírají úhel 60°, neboť

$Z(\rho)^\perp \cap Z(\sigma)$

$$\cos\alpha = \frac{\langle (1,0,-1),(0,1,1)\rangle}{\|(1,0,-1)\|\,\|(0,1,1)\|} = \frac{1}{2}.$$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \longleftarrow$ $x_1 = a$ $\quad x_2 = -a + b$ $\quad x_3 = a - 2b$

$a[1,-1,1] + b\,(0,1,-2)$ $\quad a + a - b + a - 2b = 0$ $\quad 3a - 3b = 0$ $\quad a = b$

$$Z(p)^{\perp} \cap Z(\sigma) = [1 \cdot (1,-1,1) + 1 \cdot (0,1,-2)]$$
$$= [(1,0,-1)]$$

Jiný způsob přes normály.

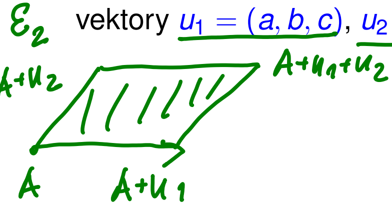
Definice

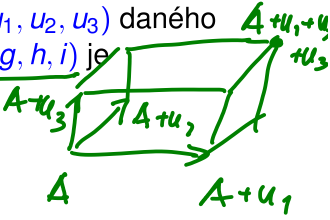
Nechť u_1, u_2, u_3, jsou lineárně nezávislé vektory v zaměření $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{E}_3$ je libovolný bod. Rovnoběžnostěn $\mathcal{P}(A; u_1, u_2, u_3) \subseteq \mathcal{E}_3$ je množina

$$\mathcal{P}(A; u_1, u_2, u_3) = \{A + c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \mid 0 \leq c_i \leq 1, i = 1, 2, k\}.$$

Orientovaný objem rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}(A, u_1, u_2, u_3)$ daného vektory $u_1 = (a, b, c)$, $u_2 = (d, e, f)$ a $u_3 = (g, h, i)$ je

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$





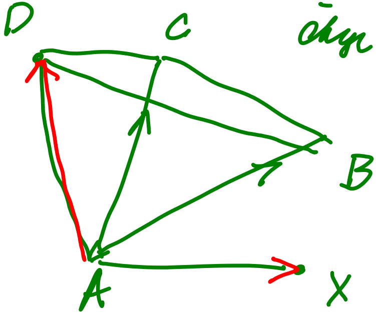
Rovnoběžnostěn

Orientace v prostoru

Řekneme, že uspořádaná trojice vektorů u_1, u_2, u_3 je kladně orientovaná báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, jestliže determinant matice 3×3, v jejichž sloupcích stojí postupně souřadnice vektorů u_1, u_2 a u_3 je kladný. Je-li tento determinant záporný, mluvíme o záporně orientované bázi.

Ve fyzice se tento pojem přibližuje pomocí tzv. pravidla pravé ruky: Položte pravou ruku na vektor u_1 tak, aby malíček ukazoval ve směru vektoru u_1 a zahnuté prsty ve směru vektoru u_2. Ukazuje-li palec ve směru u_3, má báze u_1, u_2, u_3 kladnou orientaci.

Viditelnost. Pomocí orientace můžeme zjišťovat viditelnost. Mějme v $\mathcal{A}_3$ čtyřstěn $ABCD$. Bod X leží na stejné straně roviny ABC jako bod D, jestliže trojice $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AX})$ má stejnou orientaci jako trojice $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Je-li příslušný determinant pro první trojici nulový, leží bod X v rovině ABC. Je-li orientace různá, je z bodu X vidět stěna ABC zadaného čtyřstěnu.



čtyřstěn

$X \in E_3$

je a X mimo stěnu ABC.

jsou D a X na stejné straně od ~~??~~ roviny ABC?

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AX}$

X a D jsou na jedné straně od ABC $\Longleftrightarrow$ obě trojice jsou stejně orientované

Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$ je zobrazení $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které vektorům $x = (x_1, x_2, x_3)$ a $y = (y_1, y_2, y_3)$ přiřazuje vektor $x \times y = z = (z_1, z_2, z_3)$ takový, že

$x, y \mapsto x \times y$

$$z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad z_2 = -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Vztah mezi vektorovým součinem a skalárním součinem je dán vzorcem

$$\forall u \in R^3 : \ \langle z, u \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & u_3 \end{vmatrix}.$$

$z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3$

$(-1)^{1+3} = 1$

$(-1)^{2+3} = -1$

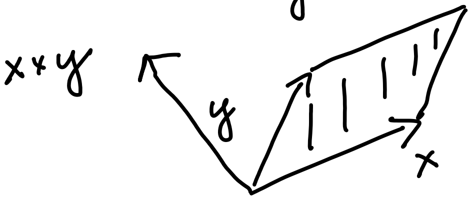
$(-1)^{3+3} = 1$

Z tohoto vzorce lze vyčíst geometrický význam vektorového součinu. Vektor $x \times y$ je vektor kolmý k oběma vektorům x i y, jeho velikost je obsahem rovnoběžníku určeného vektory x a y a jsou-li x a y lineárně nezávislé, pak jsou vektory x, y a $x \times y$ kladně orientované.

$\|x \times y\| =$ obsah rovnoběžníku

$\|x \times y\|$ = obsah rovnoběžníka určeného vektory

x a y $\qquad \mathbb{R}^3$



$\|x \times y\|$

= obsah 

Shodná zobrazení v $\mathcal{E}_3$

Řekneme, že zobrazení $F : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ je shodnost v prostoru, jestliže pro každé dva body X a $Y \in \mathcal{E}_3$ platí

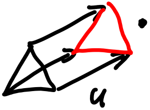
$$\mathrm{dist}(F(X), F(Y)) = \mathrm{dist}(X, Y).$$

Lze ukázat, že takové zobrazení je bijekce, zobrazuje přímky na přímky, roviny na roviny a zachovává odchylky mezi mezi těmito afinními podprostory.

Shodná zobrazení jsou složením těchto tří typů:

1) Posunutí o pevný vektor u

$$F(X) = X + u.$$

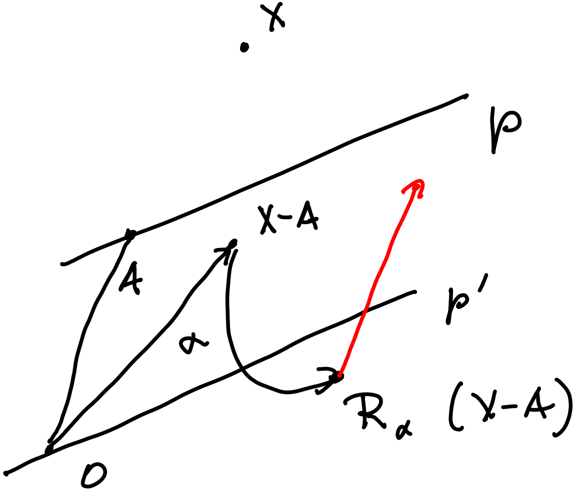


2) Otočení kolem přímky p o úhel α. Zvolme pevně $A \in p$. Potom

$$F(X) = A + R_\alpha(X - A),$$

kde $R_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je otočení kolem přímky $Z(p)$ procházející počátkem.

rotace kolem $Z(p)$


X
p
X-A
A
p'
α
$R_\alpha(X-A)$
O

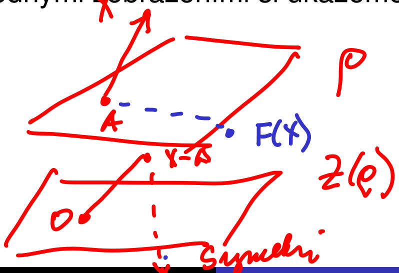
Shodná zobrazení – pokračování

3) Symetrie podle roviny ρ. Nechť $A \in \rho$ je pevný bod. Pak

$$F(X) = A + S_{Z(\rho)}(X - A) = A + (X - A) - 2P_{Z(\rho)^{\perp}}(X - A),$$

kde $S_{Z(\rho)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny $Z(\rho)$ procházející počátkem. Tuto symetrii můžeme spočítat pomocí kolmé projekce $P_{Z(\rho)^{\perp}}(X - A)$ vektoru $X - A$ do $Z(\rho)^{\perp}$. (Namalujte si obrázek.)

Počítání se shodnými zobrazeními si ukážeme na cvičení.



Umět počítat:

- Vzdálenost bodu a podprostoru.
- Vzdálenost přímek (osa mimoběžek). $\mathcal{E}_n \quad n \geq 4$
- Odchylku dvou přímek, odchylka přímky a roviny.
- Odchylku dvou rovin mající jednodimenzionální průnik zaměření.
- Objem rovnoběžnostěnu a čtyřstěnu. $V_{\Delta} = \frac{1}{6}$ objemu rovnoběžnost
- Viditelnost. orientací
- Vektorový součin.
- Shodná zobrazeními v $\mathcal{E}_3$. ??

Domácí úloha

Příklad (8.1)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ určete vzdálenost bodu $B = [2, 0, 3]$ od přímky $p : [-1, 0, 0] + t(2, -2, 1)$.

Příklad (8.2)

V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dán čtyřstěn $ABCD$, kde $A = [-1, 0, 1]$, $B = [1, 2, -1]$, $C = [-3, 2, 1]$ a $D = [5, 2, 3]$. Buď P pata výšky spuštěná z vrchlu D do roviny stěny ABC. Určete souřadnice bodu P a velikost výšky DP. Dále určete objem čtyřstěnu $ABCD$. Dále je dán bod $X = [2, 3, -10]$. Zjistěte, které stěny čteřstěnu $ABCD$ jsou z něho vidět.

Domácí úloha

Příklad (8.3)

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost roviny σ a přímky p:

$$\begin{aligned} \sigma &: [0,0,1,1] + a \cdot (0,1,0,1) + b \cdot (1,-1,2,0) \\ p &: [1,4,2,0] + c \cdot (-1,1,1,0) \end{aligned}$$

a body v nichž se realizuje.

Příklad (8.4)

V $\mathbb{R}^3$ určete odchylku roviny $\sigma : x + 2y + z = 5$ a

i) přímky $p : [1000, 2013, 0] + t \cdot (1,1,1)$;

ii) roviny $2x + y - z = 2013$.

Domácí úloha

Příklad (8.5)

Mějme v $\mathbb{R}^3$ body $A = [2, -1, 3]$, $B = [1, 2, 3]$ a $C = [2, -3, 8]$.
Určete obsah trojúhelníku ABC.